MÓDULO 5

- **JACOBIANOS**
- **TEOREMA DE LA FUNCIÓN IMPLÍCITA**
- **TEOREMA DE LA FUNCIÓN INVERSA**

Jacobianos

Cuando se considera un sistema de ecuaciones donde el número de variables independientes es igual al número de variables dependientes, puede considerarse tal sistema como una **transformación o cambio de coordenadas.**

Por ejemplo si se tiene el sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

donde las funciones definidas por él:

$$\begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \end{cases}$$

son una aplicación de los puntos del plano *uv* en los del plano *xy*.

Los cambios de coordenadas más utilizados son las coordenadas: **polares, cilíndricas y esféricas.**

Definición

La **matriz jacobiana** tiene como entradas a las derivadas parciales de las funciones que definen la aplicación con respecto a sus variables.

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Denominamos **jacobiano** al determinante de tal matriz jacobiana:

$$J = J\left(\frac{X,Y}{u,v}\right) = \left|\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}$$

Ejemplos

Ejemplo 1

Queremos calcular el jacobiano del cambio de variable: $\begin{cases} x = X(u,v) = u - 2v \\ y = Y(u,v) = 2u - v \end{cases}$

$$J\left(\frac{X,Y}{u,v}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v}\\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1+4=3$$

Ejemplo 2

Una de las transformaciones más utilizadas es el cambio a coordenadas polares, queremos hallar el jacobiano de este cambio de variables.

$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\ \operatorname{sen}\theta$$

$$J\left(\frac{X,Y}{r,\theta}\right)=\begin{vmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta\\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\operatorname{sen}^2\theta=r$$

Ejemplo 3

Con las coordenadas cilíndricas

$$x=r.\cos\theta$$
$$y=r.sen\theta$$
$$z=z$$

$$J\left(\frac{X,Y,Z}{r,\theta,z}\right)=\begin{vmatrix}\cos\theta & \operatorname{sen}\theta & 0\\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\operatorname{sen}^2\theta=r$$

Ejemplo 4

Otra de las transformaciones muy utilizadas es el cambio a coordenadas esféricas

$$x=r.\cos u\ .\cos v$$
$$y=r.\operatorname{sen} u\ \cos v$$
$$z=r.\ \operatorname{sen} v$$

$$J\left(\frac{X,Y,Z}{r,u,v}\right)=\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial r} & \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v}\\ \frac{\partial Y}{\partial r} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v}\\ \frac{\partial Z}{\partial r} & \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos u\cos v & -r\operatorname{sen}u\cos v & -r\cos u\operatorname{sen}v\\ \operatorname{sen}u\cos v & r\cos u\cos v & -r\operatorname{sen}u\operatorname{sen}v\\ \operatorname{sen}v & 0 & r\cos v\end{vmatrix}=$$

$$=r^2\cos^2u\cos^3v+r^2\operatorname{sen}^2u\operatorname{sen}^2v\cos v+r^2\cos^2u\ sen^2v\cos v+r^2\operatorname{sen}^2u\cos^3v=$$

$$=r^2\cos^3v+r^2\operatorname{sen}^2v\cos v=r^2\cos v$$

5.1.-

Calcular el jacobiano del cambio de variables indicado:

$$a)\; x=-\frac{1}{2}(u-v);\; y=\frac{1}{2}(u+v)$$
$$b)\; x=u-v^2;\; y=u+v$$
$$c)\; x=u-uv;\; y=u.v$$

<u>Teorema de la función implícita</u>

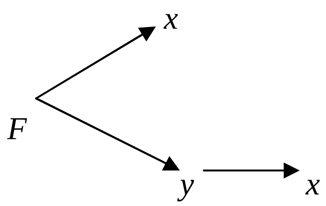
Sea $F: D\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto, F con derivadas parciales continuas en D, $(x_0, y_0)\in D$, $F(x_0,y_0)=0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$, entonces existen $\delta_h>0$ y $\delta_k>0$ tales que:

i) $\forall x\in (x_0-\delta_h, x_0+\delta_h)$, la ecuación $F(x,y)=0$ tiene una **única** solución en $(y_0-\delta_k, y_0+\delta_k)$

ii) Denotando esa única solución por $f(x)$, la función $y=f(x)$ tiene derivada continua en $(x_0-\delta_h, x_0+\delta_h)$, dada por:

$$y'=f'(x)=-\frac{\dfrac{\partial F(x,f(x))}{\partial x}}{\dfrac{\partial F(x,f(x))}{\partial y}}$$

Una manera sencilla de recordar este resultado es usando el diagrama de árbol para la derivada de funciones compuestas:



Como $F(x,y)=0$, cualquiera de sus derivadas también valdrá **cero**.

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}.\underbrace{\frac{\partial y}{\partial x}}_{y'}=0 \Rightarrow y'=-\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$$

Para el caso de una función de tres variables tendríamos $F(x,y,z)=0; z=f(x,y)$ y $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Sugerencia: Plantear el diagrama de árbol correspondiente para justificar estas fórmulas.

Ejemplos

Ejemplo 1

La ecuación

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

no se satisface en ningún punto (x, y) del plano, y en consecuencia, no define ninguna función implícita $y = f(x)$.

Ejemplo 2

La ecuación

$$x^2 + y^2 = 0$$

sólo se satisface en el origen $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, con lo que no definirá implícitamente ninguna función significativa.

Ejemplo 3

La ecuación

$$x^3 + y^3 - 2 = 0$$

sí define a *y* como función implícita de *x*, y en este caso es posible expresar a *y* como función explícita de *x*.

$$y = \sqrt[3]{2 - x^3} \quad x \in \mathbb{R}$$

Podemos entonces, plantear y resolver el siguiente problema:

Ejemplo 4

Sea $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2$, obtener un punto de $\mathbb{R}^2$, donde sea aplicable el TFI, obtener y' en dicho punto. Haciendo $F(x, y) = 0$, despejar *y* y derivarla para verificar el resultado.

Solución

Las hipótesis del TFI nos piden:

1) Derivadas parciales continuas de *F*, cosa que se ve claramente por ser *F* polinómica.

2) Un punto en el que F se anule, en nuestro caso anda el (1,1).

3) Y no se anule la derivada $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) \neq 0$, $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 3y^2 \Rightarrow \frac{\partial F(1,1)}{\partial y} = 3 \neq 0$

Como las hipótesis se cumplen, entonces también se cumple la conclusión del teorema, por lo tanto calculamos la otra derivada parcial

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = 3$$

$$y' = f'(1) = -\frac{\frac{\partial F(1,1)}{\partial x}}{\frac{\partial F(1,1)}{\partial y}} = -\frac{3}{3} = -1$$

Verifiquemos el resultado despejando y derivando:

$$x^3 + y^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow y = \sqrt[3]{2 - x^3}$$

$$y' = f'(x) = -\frac{1}{3}\left(2 - x^3\right)^{-\frac{2}{3}}.3x^2$$

$$f'(1) = -1$$

5.2.-

Considerar la ecuación $x^3 y + y^2 - x\,y^5 - 1 = 0$

a) Demostrar que la ecuación define implícitamente una función de la forma $y = f(x)$ alrededor del punto $(1,1)$.

b) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la función implícita en (1,1)?

c) ¿Cómo es la concavidad de f alrededor de (1,1)?

d) Hacer un bosquejo de la grafica de f en una vecindad de (1,1).

5.3.-

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1 + x.y - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$

Calcular las derivadas primeras y segundas de la función implícita $y = g(x)$ definida por $f(x,y) = 0$.

5.4.-

Calcular las derivadas primeras y segundas de la función implícita $y = f(x)$, definida por la ecuación $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$

5.5.-

Sea $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, analizar para qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es aplicable el teorema de la función implícita para definir una función $y = f(x)$ tal que $F(x,y) = 0$. Para esos puntos hallar y'.

5.6.-

Considerar $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, F(x,y) = x^4 - e^{x\,y^3-1}$. Probar que en un entorno del punto (1,1) es aplicable el teorema de la función implícita y calcular y'. Luego hacer $F(x,y) = 0$, despejar $y = f(x)$ y verificar el resultado por derivación.

5.7.-

Sea $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, F(x,y) = e^{2y+x} + \operatorname{sen}(x^2 + y) - 1$. Obtener un punto de $\mathbb{R}^2$ en cuya vecindad sea aplicable el teorema de la función implícita y obtener y'. Observar que en este caso no es posible hacer explícita la función $y = f(x)$, pero sí su derivada.

5.8.-

Dada $F:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, F(x,y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Indicar un punto de $\mathbb{R}^2$ alrededor del cual se verifique el teorema de la función implícita, y obtener para tal punto las derivadas primeras y segundas de $y = f(x)$

5.9.-

Dada $F:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, F(x,y,z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0$

a) Hallar c tal que $F(0,e,2) = 0$

b) Obtener $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ si $z = f(x,y)$

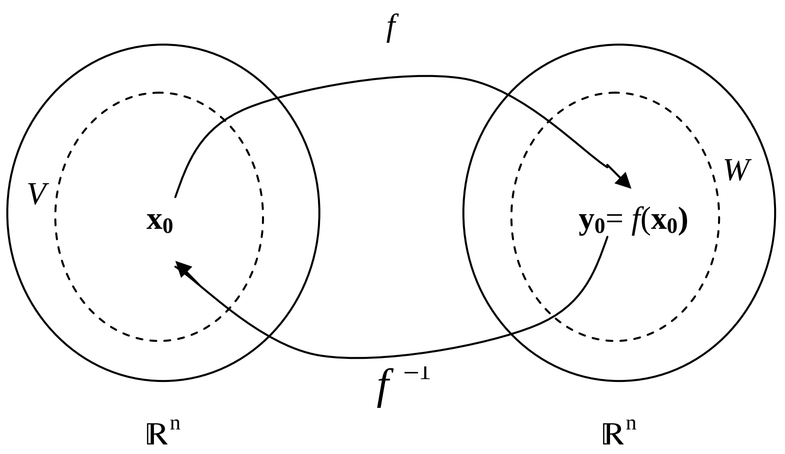
5.10.-

La ecuación $x^2 + y^2 + 2axy$, en la que $a > 1$, define una función $y = y(x)$. Probar que $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Teorema de la función inversa

Sea $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con derivadas parciales continuas en un conjunto abierto que contiene al punto $\mathbf{x_0}$ y tal que $\det Jf(\mathbf{x_0}) = \left|Jf(\mathbf{x_0})\right| \neq 0$, entonces existe un entorno V abierto $\left(V \subset \mathbb{R}^n\right)$ que contiene a $\mathbf{x_0}$ y existe otro entorno W abierto $\left(W \subset \mathbb{R}^n\right)$ que contiene a $\mathbf{y_0} = f(\mathbf{x_0})$ tal que:
$f:V \to W$ tiene una inversa continua $f^{-1}:W \to V$, que es diferenciable y que $\forall \mathbf{y} \in W$ satisface:

$$\left(Jf^{-1}\right)(\mathbf{y}) = \left[Jf(\mathbf{x})\right]^{-1}$$



Ejemplo

Dada $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x,y) = \left(5e^{4y}, 3e^{5x} + 2e^{4y}\right)$, a) Probar que f es localmente inversible en un entorno de cada punto de $\mathbb{R}^2$. b) Obtener f^{-1}. c) Comprobar que Jf y Jf^{-1} son matrices inversas en puntos correspondientes

a)

$$f(x,y) = \left(5e^{4y}, 2e^{4y} + 3e^{5x}\right)$$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 20e^{4y} \\ 15e^{5x} & 8e^{4y} \end{pmatrix} \to \det Jf(x,y) = -300e^{5x}e^{4y} \neq 0 \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Por lo tanto f es inversible alrededor de cada punto del plano.

b)

$$u = 5e^{4y} \to \frac{u}{5} = e^{4y} \to y = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{u}{5}\right)$$

$$v = 3e^{5x} + 2e^{4y} \to v = 3e^{5x} + \frac{2}{5}u \to v - \frac{2}{5}u = 3e^{5x} \to x = \frac{1}{5}\ln\left[\frac{1}{3}\left(v - \frac{2}{5}u\right)\right]$$

$$f^{-1}(u,v) = \left(\frac{1}{5}\ln\left[\frac{1}{3}\left(v - \frac{2}{5}u\right)\right], \frac{1}{4}\ln\left(\frac{u}{5}\right)\right)$$

c)

$$Jf^{-1}(u,v)=\begin{pmatrix} \dfrac{-2}{75\underbrace{\frac{1}{3}\left(v-\frac{2}{5}u\right)}_{e^{5x}}} & \dfrac{1}{15\underbrace{\frac{1}{3}\left(v-\frac{2}{5}u\right)}_{e^{5x}}} \\ \dfrac{1}{20\underbrace{\left(\frac{u}{5}\right)}_{e^{4y}}} & 0 \end{pmatrix} \to Jf^{-1}(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{-2}{75e^{5x}} & \dfrac{1}{15e^{5x}} \\ \dfrac{1}{20\,e^{4y}} & 0 \end{pmatrix}$$

$Jf\,(x,y)\;Jf^{-1}\,(x,y)=Jf^{-1}\,(x,y)\;Jf\,(x,y)=I$

Son matrices inversas.

5.11.-

Estudiar si g es localmente inversible, es decir si $\left|Jg(t)\right|\neq 0,\forall t\in\Delta$. En ese caso, determinar g^{-1}:

$a)\;g(s,t)=(s+2t\,,s-t)\,;\Delta=\mathbb{R}^2$ $\qquad c)\;g(s,t)=\left(2s+3.t\,,\;s-4t\right)\,;\Delta=\mathbb{R}^2$

$b)\;g(s,t)=(s^2-s-2\,,3t)\,;\;\Delta=\mathbb{R}^2$ $\qquad d)\;g(s,t)=(s^2-t^2\,,st)\,;\;\Delta=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$

5.12.-

Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\,/\,f\,(x,y,z)=\left(\text{sen}(x+z),\text{sen}(y+z),e^y\right)$

a) Demostrar que *f* es localmente inversible en (0, 0, 0)

b) Ver que existen puntos en $\mathbb{R}^3$ donde no se cumplen las condiciones del teorema de la función inversa, es decir donde $\left|f'(x_0,y_0,z_0)\right|=0$.

5.13.-

Sea la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\,/\,f\,(x,y)=\left(e^{2x}-e^y,e^y\right)$

a) Probar que *f* es localmente inversible en un entorno de cada punto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

b) Obtener f^{-1} para los puntos (x,y) de ese entorno.

c) Comprobar que las matrices derivadas de f y f^{-1}, en puntos correspondientes, son inversas.

5.14.-

Sea $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:g(s,t,u)=\left(u.\cos(st)\,,u.\text{sen}(st)\,,s+u\right)$. En particular vale que $g(1{,}0{,}1)=(1{,}0{,}2)$. Calcular $J\,g^{-1}(1{,}0{,}2)$.

Problemas propuestos

Recuperatorio 2005

Sea $z = f(x, y)$ dada implícitamente por: $F(x, y, z) = x\,y\,z - e^z = 0$.

Demostrar que: $$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}\left(e^2, \tfrac{1}{2}, 2\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\left(e^2, \tfrac{1}{2}, 2\right)$$

Recuperatorio 2006

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(u,v) = \left(e^{u+v}, e^{u-v}\right)$. a) Probar que *f* es localmente inversible en un entorno de cada punto $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. b) Obtener f^{-1} para los puntos (u,v) de ese entorno. c) Comprobar que las matrices Jf y Jf^{-1}, en puntos correspondientes, son inversas.

Recuperatorio 2007

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x, y) = \left(3e^{2x} + e^{3y}, 2e^{3y}\right)$

a) Probar que *f* es localmente inversible en un entorno de cada punto de $\mathbb{R}^2$. b) Obtener f^{-1}. c) Comprobar que Jf y Jf^{-1} son matrices inversas en puntos correspondientes.

Final febrero 2015

Dada la función $F(x, y, z) = 3xy + xz + yz - 3e^z$.

a) Probar que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como función de (x, y), $z = f(x, y)$, en un entorno del punto $(1,1)$.

b) Calcular la derivada direccional de *f* en el punto (1,1) en la dirección que va hacia el (0,0).