MÓDULO 6

- **FÓRMULA DE TAYLOR DE ORDEN 2**
- **PLANOS TANGENTES**
- **EXTREMOS RELATIVOS**
- **EXTREMOS ABSOLUTOS**
- **EXTREMOS CONDICIONADOS**

Fórmula de Taylor de orden 2

La fórmula de Taylor para funciones de varias variables es una extensión de la misma para funciones de una variable y tiene el objetivo de aproximar el valor de la función mediante polinomios.

Aunque la fórmula se puede desarrollar hasta el orden que deseemos, veremos hasta el segundo orden solamente porque es el que necesitaremos luego para la clasificación de los puntos críticos de una función.

Teorema

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, D abierto, f con derivadas parciales segundas continuas, $(x_0, y_0) \in D$ y (h,k) tales que el segmento de extremos (x_0, y_0) y $(x_0 + h, y_0 + k)$ está contenido en *D*, entonces:

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) &= f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0,y_0)\,hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\,k^2\right] + R_2(h,k) \end{aligned} \qquad \textbf{(1)}$$

Con

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_2(h,k)}{h^2+k^2} = 0$$

A esta fórmula también la podemos escribir en notación matricial de la siguiente manera

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\,(h,k) + \frac{1}{2}(h,k)\,Hf(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + R_2(h,k)$$

Donde

$$Hf(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}_{(x_0,y_0)}$$

es la matriz hessiana de *f*, que resulta simétrica puesto que las hipótesis garantizan que las derivadas cruzadas son iguales.

Al **polinomio de Taylor de segundo orden lo definimos**:

$$P_2(h,k) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)(h,k) + \frac{1}{2}(h,k)\,Hf(x_0,y_0)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

A la expresión encerrada entre corchetes en **(1)** le damos el nombre de **diferencial segunda de la función *f***.

Y la simbolizamos $d^2 f(x_0,y_0;h,k)$

$$d^2 f(x_0,y_0;h,k) \overset{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0,y_0)\,hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\,k^2$$

Ejemplo

Sea $f(x,y) = e^{2x+3y}$, hallar la fórmula y el polinomio de Taylor de orden 2 en (0,0).

$$f(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\,Hf(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R_2(x,y)$$

con $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{R_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$

$$f(0,0) = e^0 = 1$$
$$\nabla f(x,y) = \left(2e^{2x+3y}, 3e^{2x+3y}\right)$$
$$\nabla f(0,0) = (2,3)$$
$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 4e^{2x+3y} & 6e^{2x+3y} \\ 6e^{2x+3y} & 9e^{2x+3y} \end{bmatrix}$$
$$Hf(0,0) = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Reemplazando

$$f(x,y) = 1 + (2,3)(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + R_2(x,y)$$

$$f(x,y) = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2 + R_2(x,y)$$

$$P_2(x,y) = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2$$

Vamos ahora a mostrar con un ejemplo, no a demostrar de manera general, que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0 .$$

Lo que vamos a hacer es tomar un par de valores (x, y) cercanos al (0,0) y evaluar el error cometido calculando la diferencia entre f y P_2. Luego veremos que R_2 es mucho menor que x^2+y^2, con lo cual el límite del cociente tiende a cero.

Si x = 0,01 ; y = - 0,03

$P_2(x,y) = P_2(0{,}01;-0{,}03) = 0{,}93245$

$f(x,y) = f(0{,}01;-0{,}03) = 0{,}9323238$ con calculadora

$R_2(x,y) = R_2(0{,}01;-0{,}03) = f(0{,}01;-0{,}03) - P_2(0{,}01;-0{,}03) = 5{,}618.10^{-5}$

$x^2+y^2 = 0{,}01^2 + (-0{,}03)^2 = 1.10^{-3}$

$\therefore\ R_2 < x^2+y^2$

Caso de tres variables

Si la función fuera de tres variables tendríamos que el gradiente de f cambia a:

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

y la matriz hessiana toma la forma:

$$Hf(x,y,z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

6.1.-

Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$, en un entorno del punto (0,0).

6.2.-

Determinar el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, alrededor de $P = \left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Sugerencia: hacer el cambio de variables $x = x_0 + h;\ y = y_0 + k$.

6.3.-

Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y,z) = \text{sen}\, x + \text{sen}\, y + \text{sen}\, z - \text{sen}\,(x+y+z)$ en un entorno del punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

6.4.-

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y,z) = x^2 - 3x^2y^2 + z^2$. Hallar la diferencial segunda de *f* en el punto dado:

$$d^2 f\big((-1,0,1); dx, dy, dz\big)$$

Uso del gradiente para determinar la ecuación del plano tangente

Habíamos visto que una de las propiedades del vector gradiente, era que se ponía ortogonal a las curvas de nivel de una función diferenciable de dos variables.

Podemos extender esto al caso de una función de tres variables $f(x,y,z) = 0$, considerándola como una **superficie de nivel cero**.

Si esta función es **diferenciable**, el vector gradiente será un vector **normal** a la superficie en cada uno de sus puntos.

Recordemos que si una función es diferenciable en un punto, en un entorno de él, si mirásemos la gráfica con una "lupa", la veríamos prácticamente plana, con lo que tiene sentido definir allí el **plano tangente** a la gráfica de *f*.

Vimos además que para definir la ecuación de un plano solamente necesitábamos un vector normal y un punto de dicho plano, puesto que con otro punto genérico calculábamos el vector por diferencia entre extremo y origen y luego imponíamos la condición de perpendicularidad entre vectores que era pedir que su producto escalar diera **cero**.

Ahora podemos dar la definición formal de plano tangente a una superficie de nivel

Definición

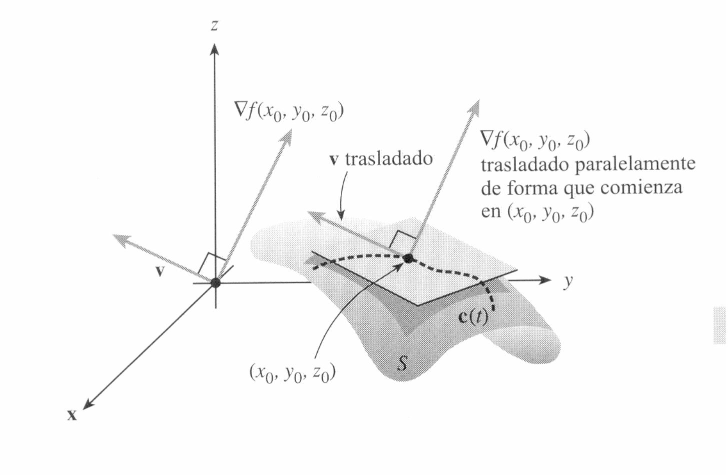
Sea *S* la superficie que está formada por aquellos (x,y,z) tales que $f(x,y,z) = c$, para *c* constante.

Sea (x_0, y_0, z_0) un punto de *S* en el que *f* es diferenciable.

El plano tangente a *S* en (x_0, y_0, z_0) se define por medio de la ecuación:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

si $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq (0.0,0)$.



Ejemplo

Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $3xy + z^2 = 4$ en (1,1,1).

En este caso tenemos que $f(x, y, z) = 3xy + z^2 - 4$ y $\nabla f(x, y, z) = (3y, 3x, 2z)$ que en el punto vale: $\nabla f(1,1,1) = (3,3,2)$.

Por lo tanto, la ecuación del plano tangente resulta

$$(3,3,2) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0$$

es decir

$$3x + 3y + 2z = 8$$

6.5.-

Mostrar que la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $z = x^2 + y^3$ en el punto $(3,1,10)$ es $z = 6x + 3y - 11$.

6.6.-

Escribir las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies en los puntos que se indican:

a) paraboloide $z = x^2 + y^2$ en $(1; -2; 5)$ b) cono $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ en $(4; 3; 4)$

c) esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ en $(R\cos\alpha; R\,\text{sen}\,\alpha; R)$

6.7.-

Dada la superficie $f(x, y, z) = 3x^2 + \dfrac{16}{3}y^2 - 2z^2 - 6x = 0$; determinar todos los puntos, si existen, en que los planos tangentes a ella, sean paralelos a los planos coordenados.

6.8.-

Demostrar que el elipsoide $x^2+3y^2+2z^2=9$ es tangente, en el punto (2; 1; 1), a la esfera $x^2+y^2+z^2-8x-8y-6z+24=0$.

6.9.-

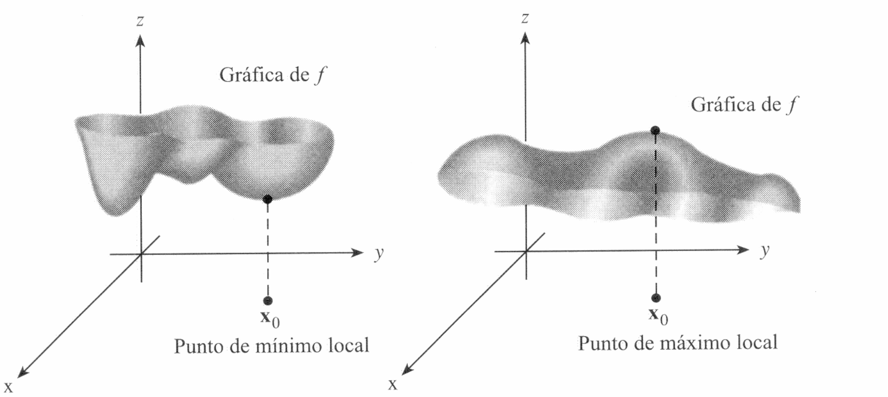
Demostrar que todos los planos tangentes a la superficie cónica $z=x.f\left(\dfrac{y}{x}\right)$; en su punto $M=(x_0;y_0;z_0)$, donde $x_0\neq 0$, pasan por el origen de coordenadas.

Extremos de funciones de dos variables

Una de las aplicaciones más importantes del cálculo diferencial en varias variables es la optimización, es decir la determinación de aquellos puntos, si existen, en los que la gráfica de una función alcanza sus máximos y sus mínimos.

Vamos a enunciar las condiciones para determinar tales puntos en funciones de dos variables.

Si observamos las siguientes gráficas de funciones, vemos que presentan, en la parte del dominio considerada, picos y depresiones. Intuitivamente podemos decir que en un pico se produce un máximo y en un valle un mínimo.



Esto debe ser expresado con precisión mediante la siguiente:

Definición

Sea $f:D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$; $(x_0,y_0)\in D$, decimos que $f(x_0,y_0)$ es un **máximo relativo** de *f*, si existe un entorno abierto *R* de (x_0,y_0) para el que se cumple: $f(x_0,y_0)\geq f(x,y),\forall(x,y)\in R$

Análogamente $f(x_0,y_0)$ es un **mínimo relativo** de *f*, si existe un entorno abierto *R* de (x_0,y_0) para el que se cumple: $f(x_0,y_0)\leq f(x,y),\forall(x,y)\in R$

En los dos casos $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ es un **punto extremo** de la función.

Si observamos la gráfica anterior parece ser que el plano tangente en los puntos extremos locales se pone horizontal, sin embargo el hecho de que las derivadas parciales sean cero, no nos garantiza la existencia de extremos locales. Veamos esto:

Definición

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in D$, el punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** de la función $f(x, y)$ si ocurre una de las siguientes cosas:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$, o bien $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ no existen.

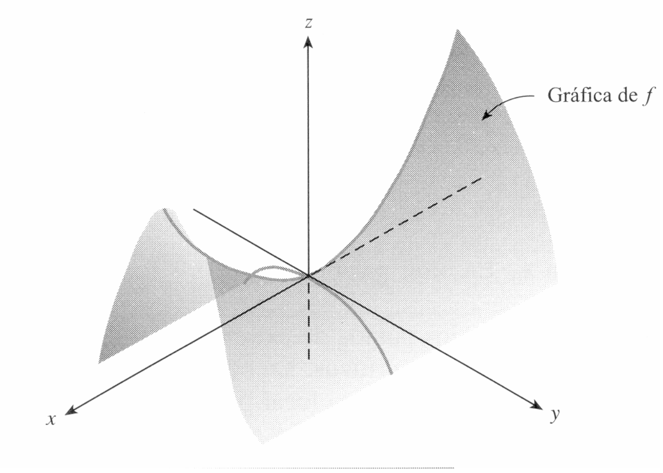
Teorema

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in D$, si $f(x, y)$ tiene un **extremo relativo** en el punto (x_0, y_0), entonces (x_0, y_0) es un **punto crítico** de la función.

Acá es donde debemos tener cuidado, porque los extremos relativos sólo pueden darse en los puntos críticos, pero puede ocurrir que **existan puntos críticos que no sean extremos**.

En algunos casos en los puntos críticos se dan los llamados **puntos de silla**, que son puntos (x_0, y_0) de la función que presentan las siguientes características: en cualquier entorno de (x_0, y_0) existen pares $(x, y) / f(x, y) > f(x_0, y_0)$ y también pares $(x, y) / f(x, y) < f(x_0, y_0)$, es decir que no cumplen con la condición de máximo relativo ni de mínimo relativo.

El nombre de puntos de silla se debe a que en esos lugares la gráfica de la función parece una silla de montar.



Así que, si bien vamos a plantear la condición de que ambas derivadas parciales se anulen (o ambas no existan) para hallar los puntos críticos, tendremos en cuenta que algunos de ellos pueden ser extremos, otros puntos de silla y otros ninguna de estas cosas. Una vez hecho esto debemos clasificar los puntos obtenidos, para esto disponemos del siguiente:

<u>Teorema</u> (criterio de las derivadas segundas)

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x_0, y_0) \in D$

Supongamos que $f(x, y)$ tiene derivadas parciales segundas continuas en algún entorno abierto que contiene al punto (x_0, y_0), y que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Se hace la matriz hessiana de *f* en (x_0, y_0):

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} (x_0, y_0)$$

y se calcula su determinante: $\det Hf(x_0, y_0)$

1) Si $\det Hf(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ entonces *f* tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0).

2) Si $\det Hf(x_0, y_0) > 0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ entonces *f* tiene un máximo relativo en (x_0, y_0).

3) Si $\det Hf(x_0, y_0) < 0$ entonces *f* tiene un punto de silla en (x_0, y_0).

4) Si $\det Hf(x_0, y_0) = 0$ entonces el criterio no decide.

Ejemplos

Ejemplo 1

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$; determinar, si existen, los extremos de *f* y clasificarlos.

Primero vemos que, por ser polinómica, el dominio de *f* es todo $\mathbb{R}^2$, entonces planteamos las condiciones para encontrar sus puntos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 6xy - 6y$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 6x = 0 & (1) \\ 6xy - 6y = 0 & (2) \end{cases}$$

De (2) se obtiene $6xy-6y=0 \Rightarrow 6y(x-1)=0 \Rightarrow y=0$ ó $x=1$

Si reemplazamos $y=0$ en (1) nos queda

$3x^2-6x=0 \Rightarrow 3x(x-2)=0 \Rightarrow x=0$ ó $x=2$

Obtenemos dos puntos $P_1=(0,0)$ y $P_2=(2,0)$

Ahora sustituimos $x=1$ en (1)

$3+3y^2-6=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow y=1$ ó $y=-1$

Son otros dos puntos $P_3=(1,1)$ y $P_4=(1,-1)$

En total la función presenta cuatro puntos críticos por la anulación de ambas derivadas parciales y ninguno por la no existencia de las mismas. Para clasificarlos calculamos la matriz hessiana y su determinante evaluándolo en cada uno de los puntos críticos.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x-6 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x,y)=6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x,y)=6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=6x-6$$

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 6x-6 & 6y \\ 6y & 6x-6 \end{pmatrix}$$

$$\det Hf(P_1)=\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}=36>0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}P_1=-6<0 \therefore f \text{ alcanza un maximo relativo en } P_1$$

$$\det Hf(P_2)=\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}=36>0 \wedge \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}P_2=6>0 \therefore f \text{ alcanza un minimo relativo en } P_2$$

$$\det Hf(P_3)=\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}=-36<0 \therefore f \text{ tiene un punto de silla en } P_3$$

$$\det Hf(P_4)=\begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix}=-36<0 \therefore f \text{ tiene un punto de silla en } P_4$$

Ejemplo 2

Determinar (si existen) los extremos locales y puntos de silla de la función:

$$f(x,y)=\left(x-x^2\right)\left(\frac{1}{2}y-y^2\right)$$

Para hallar los puntos críticos debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=(1-2x).\left(\dfrac{1}{2}y-y^2\right)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=\left(\dfrac{1}{2}-2y\right).\left(x-x^2\right)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \quad \text{ó} \quad y=0 \quad \text{ó} \quad y=\dfrac{1}{2} \\ \text{remplazando en la segunda ecuación} \\ \text{cada valor resulta} \\ \text{si } x=\dfrac{1}{2} \quad y=\dfrac{1}{4}; \\ \text{si } y=0 \quad x=0 \quad \text{ó} \quad x=1; \\ \text{si } y=\dfrac{1}{2} \quad x=0 \quad \text{ó} \quad x=1 \end{cases}$$

Resultan así cinco puntos críticos $P_1=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$, $P_2=(0{,}0)$, $P_3=(1{,}0)$, $P_4=\left(0,\frac{1}{2}\right)$ y $P_5=\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

Analizamos el determinante de la matriz hessiana para cada punto:

$Hf(P_1)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8} & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{16}>0$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ la función tiene un **máximo local** en P_1.

$Hf(P_2)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}<0$ la función tiene un punto de silla en P_2

$Hf(P_3)=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}<0$ la función tiene un punto de silla en P_3

$Hf(P_4)=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}<0$ la función tiene un punto de silla en P_4

$Hf(P_5)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}=-\frac{1}{4}<0$ la función tiene un punto de silla en P_5

<u>Criterio para funciones de tres variables</u>

Sea $f: U\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, U abierto, f con derivadas parciales segundas continuas en U, $(x_0,y_0,z_0)\in U$ un punto crítico de f.

Calculamos los determinantes

$$H_1 f(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0,z_0)$$

$$H_2 f(x_0,y_0,z_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)} \qquad H_3 f(x_0,y_0,z_0)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{bmatrix}_{(x_0,y_0,z_0)}$$

1) Si $H_1 > 0, H_2 > 0, H_3 > 0$, f alcanza un **mínimo relativo** en (x_0, y_0, z_0)

2) Si $H_1 < 0, H_2 > 0, H_3 < 0$, f alcanza un **máximo relativo** en (x_0, y_0, z_0)

3) En los seis casos restantes f tiene un **punto de silla** en (x_0, y_0, z_0)

6.10.-

Hallar y clasificar, si existen, los puntos críticos de las siguientes funciones:

$a)\ f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

$b)\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$c)\ f(x,y) = (x - y + 1)^2$

$d)\ g(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$

$e)\ h(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$

$f)\ g(x,y) = e^{(x-y)}.(x^2 - 2y^2)$

$g)\ h(x,y) = 2x^3 + 2y^2 - 12.x.y + 6y + 12x - 21$

$h)\ f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2 - 2y^2$

$i)\ f(x,y) = \cos x.\cos y\ ;\ 0 < x < 2\pi ; 0 < y < 2\pi$

$j)\ f(x,y) = \text{sen}x.\cos y;\ 0 < x < 2\pi ; 0 < y < 2\pi$

$k)\ f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 - 2xy - x - 2z$

6.11.-

Sea $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2 y + y^2$. Demostrar que sobre toda recta de la forma $y = m.x$, la función tiene un mínimo en (0,0), pero que no existe mínimo relativo en ningún entorno bidimensional del origen. Hacer un dibujo indicando el conjunto de puntos (x,y) en los que $f(x,y) > 0$, y en los que $f(x,y) < 0$.

6.12.-

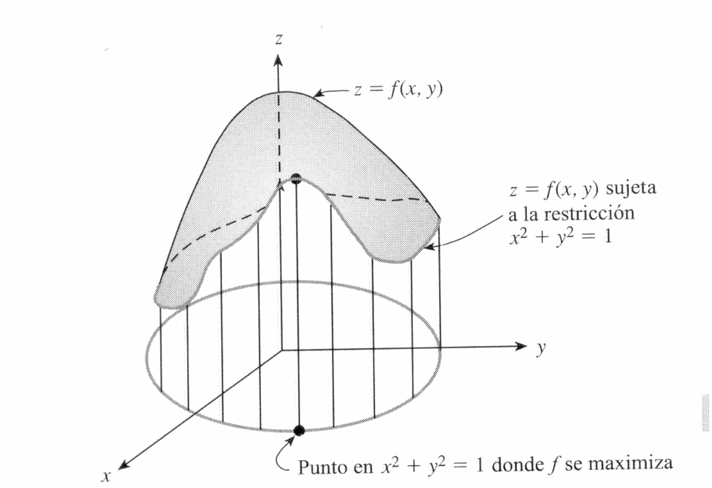
Método de los mínimos cuadrados. Dados n números distintos $x_1, \cdots, x_n$; y otros n números (no necesariamente distintos) $y_1, \cdots, y_n$; en general no es posible encontrar una recta $f(x) = ax + b$ que pase por los puntos (x_i, y_i) tal que $f(x_i) = y_i$ para cada *i*. No obstante, se puede encontrar una función lineal con la que el *error cuadrático total*: $E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_i) - y_i \right]^2$ sea mínimo. Determinar los valores de *a* y *b* para que eso ocurra.

<u>Extremos condicionados</u>

A veces se desea maximizar o minimizar una función sujeta a ciertas restricciones.

Por ejemplo podríamos querer encontrar el punto máximo de $f(x,y)$ sujeta a la condición de que $x^2 + y^2 = 1$, es decir que $(x\ ,y)$ esté en la circunferencia de radio 1.

Mostramos el caso en la figura siguiente:

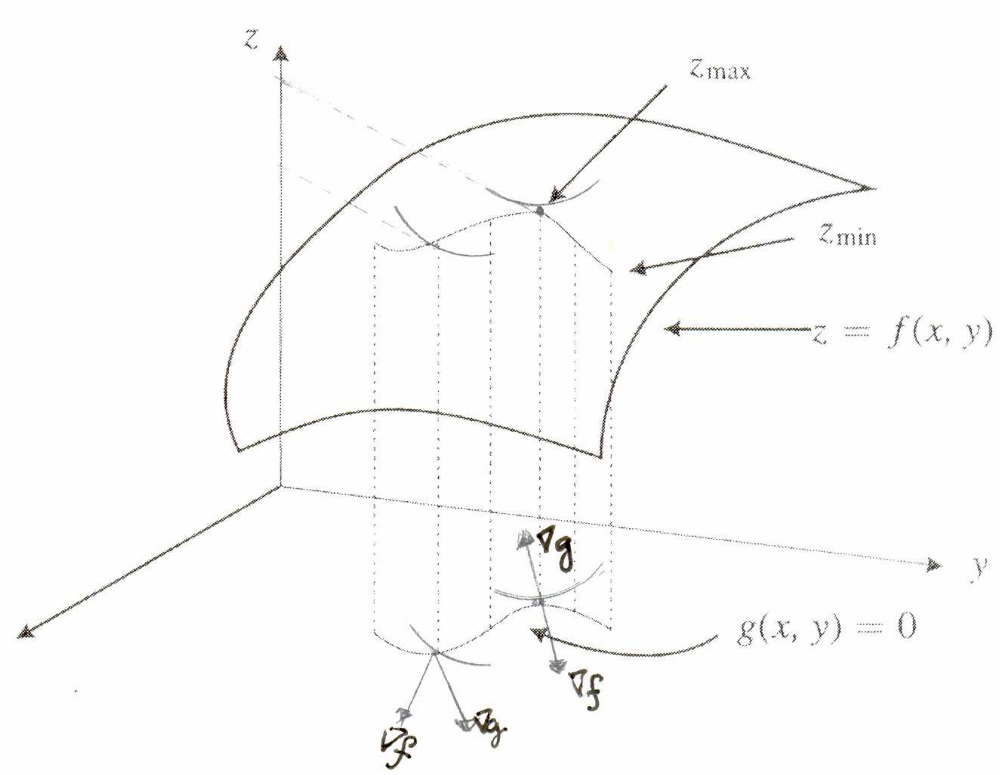


Aparentemente el máximo de f estaría en (0,0), pero no buscamos eso, sino que sólo tenemos permitido movernos en los pares $(x \; , y)$ que pertenecen a la circunferencia unitaria.

Así que debemos imaginar un cilindro de radio 1 con eje perpendicular al plano del piso y que intercepta a la gráfica de f en una curva.

Pretendemos encontrar los máximos y mínimos de esa curva.

Para resolver este tipo de problemas contamos con el método de los multiplicadores de Lagrange, que nos indica que cuando tenemos una función a optimizar $f(x, y)$, sujeta a una restricción $g(x, y) = 0$, los máximos y mínimos de f se alcanzan cuando los vectores ∇f y ∇g se ponen paralelos.



Teorema

Sean $f : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ S abierto, f y g con derivadas parciales segundas continuas en S.

Supongamos que (x_0, y_0, λ_0) es un punto crítico del Lagrangiano

$$L(x.y.\lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) \qquad \text{con } \nabla g(x_0, y_0) \neq (0.0)$$

Esto equivale a decir que $g(x_0, y_0) = 0$ y que $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$

Entonces:

1) Si $\det \overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) < 0, (x_0, y_0)$ es un **mínimo local**.
2) Si $\det \overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) > 0, (x_0, y_0)$ es un **máximo local.**
3) Si $\det \overline{H}(x_0, y_0, \lambda_0) = 0,$ el criterio **no decide.**

$\overline{H}$ es la matriz hessiana orlada

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

Para una función de tres variables y una restricción:

$f(x, y, z)$ y $g(x, y, z) = 0$

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial g}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} \\ \dfrac{\partial g}{\partial z} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

$$\overline{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} \end{bmatrix} \qquad \overline{H}_3 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} \end{bmatrix}$$

Criterio

1) Si $\overline{H}_2(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) > 0$ y $\overline{H}_3(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0$ hay un **máximo local** en (x_0, y_0, z_0)
2) Si $\overline{H}_2(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0$ y $\overline{H}_3(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) < 0$ hay un **mínimo local** en (x_0, y_0, z_0)

Ejemplo

Sea $f(x,y) = e^{xy}$ con la restricción $g(x, y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$, queremos hallar, si existen, los valores extremos de la función dada.

$$L(x,y,\lambda) = e^{xy} + \lambda\left(x^2 + y^2 - 8\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y.e^{xy} + 2\lambda x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = x.e^{xy} + 2\lambda y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 8 = 0 \quad (3)$$

Restando (1) y (2) resulta $(y - x) .\left(e^{xy} - 2\lambda\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = y \\ \lambda = \dfrac{e^{xy}}{2} \end{cases}$

Si $x = y$ en (3) $2x^2 = 8 \rightarrow x = \pm 2 \;\therefore y = \pm 2 \rightarrow P_1(2,2)\;\; P_2(-2,-2)$ en (1) $2e^4 + 4\lambda = 0 \rightarrow \lambda = \dfrac{-e^4}{2}$

Si $\lambda = \dfrac{e^{xy}}{2}$ en (1) $y\,e^{xy} + e^{xy}x = 0 \rightarrow e^{xy}(y + x) = 0 \rightarrow x = -y$ en (3) $x = \pm 2 \;\therefore\; P_3(2,-2)\;\; P_4(-2,2) \quad \lambda = \dfrac{e^{-4}}{2}$

Clasificación

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = y^2 e^{xy} + 2\lambda$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = x\,y\,e^{xy} + e^{xy} \qquad \rightarrow \overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & y^2 e^{xy} + 2\lambda & xy\,e^{xy} + e^{xy} \\ 2y & xy\,e^{xy} + e^{xy} & x^2 e^{xy} + 2\lambda \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = x^2 e^{xy} + 2\lambda$$

Evaluando la matriz orlada en $P_1 = (2,2) \quad \lambda_1 = -\dfrac{e^4}{2}$ resulta

$$\overline{H}\left(2,2,-\frac{e^4}{2}\right) = 64.e^4 > 0 \quad \textbf{máximo local} \text{ en } P_1.$$

Análogamente

$$\overline{H}\left(-2,-2,-\frac{e^4}{2}\right) = 64.e^4 > 0 \quad \textbf{máximo local} \text{ en } P_2.$$

$$\overline{H}\left(2,-2,\frac{e^{-4}}{2}\right) = -64.e^{-4} < 0 \quad \textbf{mínimo local} \text{ en } P_3$$

$$\overline{H}\left(-2,2,\frac{e^{-4}}{2}\right) = -64.e^{-4} < 0 \quad \textbf{mínimo local} \text{ en } P_4$$

6.13.-

Determinar los valores extremos de la función dada, sujeta a las restricciones que se indican en cada caso:

$a)\ f(x,y) = x.y$ con $x + y = 10$ $\quad b)\ f(x,y) = x^2 + y^2$ con $2x - 4y + 5 = 0$

$c)\ f(x,y) = 2x + 2x.y + y$ con $2x + y = 100$ $\quad d)\ g(x,y) = e^{-x.y}$ con $x^2 + y^2 - 1 = 0$

$e)\ g(x,y,z) = x + y + z$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ $\quad f)\ h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ con $x + y + z = 25$

$g)\ f(x,y) = x + 2y - 3z$ con $z = 4x^2 + y^2$

6.14.-

Calcular el volumen máximo del paralelepípedo rectangular, con caras paralelas a los planos coordenados, que se puede inscribir en el elipsoide: $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

6.15.-

Sea C la parte, en el primer octante, del arco de curva que resulta de la intersección del paraboloide $2z = 16 - x^2 - y^2$ con el plano $x + y = 4$. Encontrar los puntos de C más cercanos y más lejanos del origen. Calcular las distancias mínimas y máximas de C al origen.

6.16.-

Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y,z) = x.z + y.z$; si el punto (x,y,z) está en la intersección de las superficies: $x^2 + z^2 = 2$; $y.z = 2$.

6.17.-

Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener un valor máximo relativo de $f(x,y,z) = x.y.z$; con las restricciones: $x + y + z = 4$; $x - y - z = 3$.

6.18.-

Hallar tres números positivos cuya suma es 300, tales que la suma de los cuadrados sea mínima.

6.19.-

Hallar tres números positivos cuya suma es 240, tales que la suma de los productos tomados de a dos sea máximo.

Extremos absolutos

Para una función de una variable, continua en un intervalo cerrado [*a*,*b*], el teorema del valor extremo establece que *f* tiene un máximo absoluto y un mínimo absoluto en el intervalo.

Tenemos una situación similar para funciones de dos variables.

De la misma manera que un intervalo cerrado de $\mathbb{R}$ contiene a sus dos extremos, un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^2$ contiene a todos sus puntos frontera.

Por ejemplo el disco:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Es un conjunto cerrado.

Además un **conjunto acotado** es aquel que está contenido dentro de un disco, es decir que es **finito** en extensión.

Entonces, en términos de conjuntos **cerrados** y **acotados**, podemos establecer la analogía con el teorema del valor extremo en dos dimensiones.

Teorema

Si *f* es continua en un conjunto cerrado y acotado *D* de $\mathbb{R}^2$, entonces *f* tiene un valor máximo absoluto $f(x_0, y_0)$ y un valor mínimo absoluto $f(x_1, y_1)$, en algunos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) en *D*.

Para calcular los valores máximo y mínimo absolutos de *f*:

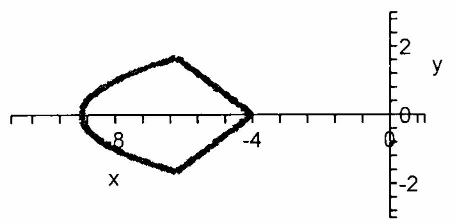
1) Determinamos los valores de *f* en los extremos relativos en el interior de *D*
2) Calculamos los valores extremos de *f* sobre la frontera de *D* (bordes y vértices).
3) El mayor de los valores encontrados es el máximo absoluto y el menor, el mínimo absoluto.

Ejemplos

Ejemplo 1

Encontrar los extremos absolutos de $f(x,y)=(x-2)^2+y^2$ en la región cerrada:
$R=\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 \,/\, y^2-x\le 9, 3x-4y+12\le 0, 3x+4y+12\le 0\}$

La región *R* está limitada por el arco de parábola $y^2=9+x$ y las rectas $3x-4y=12, 3x+4y=12$.



Tenemos que analizar la existencia de extremos dentro de la región, en los bordes y en los vértices.
a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-4=0\rightarrow x=2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y=0\rightarrow y=0$$

$P_1=(2,0)\notin R$

b) Bordes

$y^2=9+x\Rightarrow y=\pm\sqrt{9+x}$ para no tener que analizar los dos casos por separado, usamos Lagrange

$F(x,y,\lambda)=(x-2)^2+y^2+\lambda(y^2-x-9)$

$$(1)\ \frac{\partial F}{\partial x}=2(x-2)-\lambda=0$$

$$(2)\ \frac{\partial F}{\partial y}=2y-2\lambda y=0\Rightarrow 2y(1-\lambda)=0\Rightarrow y=0\ \ o\ \ \lambda=1$$

$$(3)\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=y^2-x-9=0$$

Si $y=0$ sustituyendo en $(3)\Rightarrow x=-9\Rightarrow P_2=(-9,0)$

$f(-9,0)=121$

Si $\lambda=1$ en (1) $2(x-2)-1=0\Rightarrow x=\frac{5}{2}\notin R$

$$y = \frac{-3x-12}{4}$$

$$f\left(x, \frac{-3x-12}{4}\right) = (x-2)^2 + \left(\frac{-3x-12}{4}\right)^2 \rightarrow f' = \frac{25}{8}x + \frac{1}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{25} \notin R$$

$$y = \frac{3x+12}{4}$$

$$f = (x-2)^2 + \left(\frac{3x+12}{4}\right)^2 \rightarrow f' = 0 \rightarrow x = -\frac{4}{41} \notin R$$

c) Vértices

$$P_3 = (-4{,}0) \rightarrow f(-4{,}0) = 36$$

$$P_{4,5} = \left(-\frac{56}{9}; \pm\frac{5}{3}\right) \rightarrow f\left(-\frac{56}{9}; \pm\frac{5}{3}\right) = \frac{5701}{81}$$

Comparando todos los valores de la función en los puntos obtenidos podemos concluir que:
Máximo absoluto = 121 y lo alcanza en $P_2 = (-9{,}0)$
Mínimo absoluto = 36 y lo alcanza en $P_3 = (-4{,}0)$

Ejemplo 2

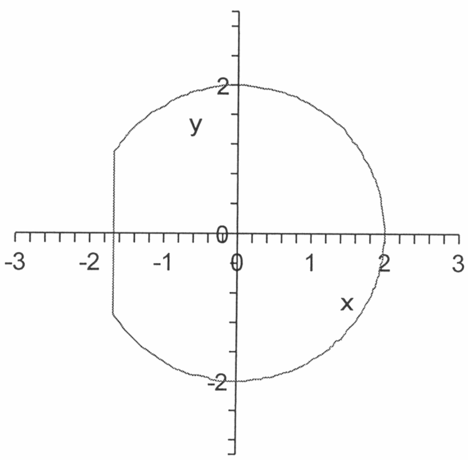
Encontrar los extremos absolutos de la función: $f(x,y) = xy^2$ en el conjunto

$$A = \left\{(x.y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 \le 4, x \ge -\frac{5}{3}\right\}$$

En primer lugar representamos el conjunto *A*. Para eso hallamos la intersección entre las dos curvas que lo definen:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x = -\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{11}}{3}$$

Luego las curvas se interceptan en los puntos $\left(-\frac{5}{3}, \pm\frac{\sqrt{11}}{3}\right)$



Observemos que *f* es una función continua (polinómica) y *A* es un conjunto cerrado y acotado, por lo tanto de cumplen las hipótesis de la existencia de los extremos absolutos que se encontrarán entre los siguientes puntos

1) Vértices del conjunto *A*: $\left(-\dfrac{5}{3}, \pm\dfrac{\sqrt{11}}{3}\right)$

2) Extremos libres de *f* en el interior de *A*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx = 0 \Rightarrow x = a \in \left(-\frac{5}{3}, 2\right)$$

3) Extremos condicionados en las distintas fronteras

3.1) Frontera descripta por la curva $x = -\dfrac{5}{3}$. Como esta curva es una función **explícita**, podemos sustituir en $f(x, y)$.

$h(y) = f\left(-\dfrac{5}{3}, y\right) = -\dfrac{5}{3}y^2 \Rightarrow h'(y) = -\dfrac{10}{3}y = 0 \Rightarrow y = 0$. El candidato a extremo en esta frontera es $\left(-\dfrac{5}{3}, 0\right)$.

3.2) Frontera descripta por $x^2 + y^2 = 4$. Como **ninguna de las variables es explícita**, tenemos que apicar el método de los multiplicadores de Lagrange para buscar los candidatos a extremos.

La función de Lagrange es: $L(x, y, \lambda) = xy^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 4)$

La condición necesaria de extremo condicionado es:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = y^2 + 2\lambda x = 0 \quad (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2yx + 2\lambda y = 0 \quad (2) \qquad \Rightarrow y = 0 \ o \ \ \lambda = -x \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 4 = 0 \,(3) \end{cases}$$

$\lambda = -x$

en (1) $\quad y^2 = 2x^2$

y en (3) $\quad x = \pm\dfrac{2\sqrt{3}}{3} \qquad y = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$y = 0$

en (3) $\quad x = \pm 2$

$P = (-2, 0) \notin Dom\ f$

Los candidatos a extremos son: $(2.0)\ y \left(\pm \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \pm \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \right)$

Para finalizar, tenemos que evaluar la función en los puntos obtenidos.

$f\left(-\dfrac{5}{3}, \pm \dfrac{\sqrt{11}}{3} \right) = -\dfrac{55}{27}$

$f(a.0) = 0$

$f\left(-\dfrac{5}{3}, 0 \right) = 0$

$f(2,0) = 0$

$f\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \pm \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \right) = \dfrac{48\sqrt{3}}{27}$ max abs

$f\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \pm \dfrac{2\sqrt{6}}{3} \right) = -\dfrac{48\sqrt{3}}{27}$ min abs

6.20.-

Determinar los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + xy$ en la región definida por:

$$R = \{(x,y) : |x| \le 2 \ ;\ |y| \le 1\}.$$

6.21.-

Hallar los extremos absolutos de la función:

$$f(x,y) = -x^2 - 3y^2 + 4y + 1$$

en el cuadrado cerrado que tiene por vértices $(-1,0);(0,1);(1,0)$ y $(0,-1)$.

6.22.-

Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ en el conjunto

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x+3)^2 + y^2 \le 16\ ,\ y^2 \le 2x + 14\right\}$$

Problemas propuestos

1.- Se dieron los siguientes datos como la altura *x* (en pulgadas) y el peso *y* (en libras) de jóvenes de 18 años. Utilice el método de los mínimos cuadrados para ajustar estos datos a una recta. Después use ésta para predecir el peso de un joven de 18 años cuya estatura es de 6 pies.

x	69	65	71	73	68	63	70	67	69	70
y	138	127	178	185	141	122	158	135	145	162

2.- Un paquete con forma de caja rectangular puede enviarse por servicio de correo si la suma de su longitud y del perímetro de la cara perpendicular a dicha longitud, es a lo sumo de 84 cm. Determinar las dimensiones del paquete que tenga el volumen máximo con esas restricciones.

Parcial 2006

Hallar y clasificar los extremos relativos, si existen, de: $f(x,y)=\frac{3}{x^2y^2}+3x^2+3y^2$

Recuperatorio 2007

Hallar el valor máximo y mínimo del producto de tres números reales *x*, *y*, *z*, si la suma se éstos debe ser cero y la suma de sus cuadrados debe ser 6.

Recuperatorio 2011

Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y)=x^2+y^2+x\,y-x-y$, en la región común a: $x\geq 0$; $y\geq 0$; $x+y\leq 3$.

Parcial 2012

Si $f(x,y,z)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}y^2-3xy+2x+z^3-3z+5$, hallar, si existen, todos sus puntos críticos y clasificarlos.

Final 3/5/11

Determinar y clasificar los extremos de $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)$, definida para puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que $x>0$ e $y>0$.

Parcial 2014

Hallar los extremos absolutos de $f(x,y)=xy$ en la región $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2\leq 4,\ y\leq\frac{5}{3}\right\}$.