ANÁLISIS MATEMÁTICO II – FINAL 11/02/2014

Parte Práctica:

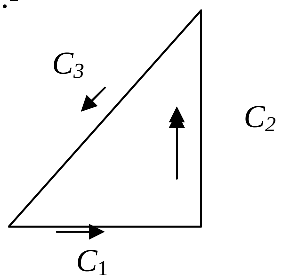
3.- Verificar el Teorema de Green siendo el campo $\mathbf{F}(x,y)=\left(y^2,x^2\right)$ y R la región triangular de vértices (0,0), (1,0) , (1,1).

4.- Dado el siguiente campo vectorial: $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3ay\dfrac{1}{x}-2xe^{3z},3\ln x+c\,z\,sen(2yz),2y\;sen(2yz)-bx^2e^{3z}\right)$

a) Hallar las constantes a, b, y c para que sea conservativo. b) Determinar la función potencial. c) Calcular el trabajo realizado para trasladar una partícula desde el punto $(1,0,1)$ al $(e,2,1)$

5.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\;\;(x,y)=(0,0)\end{cases}$ analizar la continuidad y la diferenciabilidad de f en (0,0).

3.-



a) $\iint$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x-y)\qquad R=\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le x\end{cases}\qquad \int_0^1\int_0^x 2(x-y)\,dy\,dx\;=\frac{1}{3}$$

b) $\oint$

C_1: $r_1(t)=(t,0)\quad 0\le t\le 1\qquad r_1'(t)=(1,0)\qquad F[r_1(t)]=(0,t^2)\qquad F.r'=0\Rightarrow\int_{C_1}F.r'=0$

C_2: $r_2(t)=(1,t)\quad 0\le t\le 1\qquad r_2'(t)=(0,1)\qquad F[r_2(t)]=(t^2,1)\qquad F.r'=1\Rightarrow\int_0^1 dt=1$

C_3: $r_3(t)=(1,1)(1-t)+(0,0)t=(1-t,1-t)\quad r_3'(t)=(-1,-1)\quad F(r_3)=((1-t)^2,(1-t)^2)\qquad F.r'=-2(1-t)^2$

$\int_0^1-2(1-t)^2\,dt=-\dfrac{2}{3}$

$\oint_C\;=0+1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ Se verifica el teorema de Green.

4.-

$$\text{rot}\,F=\Bigg(\underbrace{\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}}_{(1)},\underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}}_{(2)},\underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}}_{(3)}\Bigg)=(0,0,0)$$

1) $2\,\text{sen}\,(2yz)+4yz\cos(2yz)-c\;\text{sen}\,(2yz)-2cyz\cos(2yz)=\text{sen}\,(2yz)(2-c)+2yz\cos(2yz)\,(2-c)=0\Rightarrow c=2$

2) $-6xe^{3z}-2bxe^{3z}=0\Rightarrow b=3$

3) $3\dfrac{1}{x}-3a\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow a=1$

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3y\frac{1}{x}-2xe^{3z},3\ln x+2z\,\text{sen}\,(2yz),2y\,\text{sen}\,(2yz)-3x^2e^{3z}\right)$$

Función potencial:

$$f(x,y,z)=\int\left(3y\frac{1}{x}-2xe^{3z}\right)dx=3y\ln x-x^2e^{3z}+g(y,z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=F_2\Rightarrow 3\ln x+\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=3\ln x+2z\,\text{sen}\,(2yz)\Rightarrow\frac{\partial g(y,z)}{\partial y}=2z\,\text{sen}\,(2yz)\Rightarrow g(y,z)=\int 2z\,\text{sen}\,(2yz)\,dy$$

$$g(y,z)=-\cos(2yz)+h(z)$$

$$f(x,y,z)=3y\ln x-x^2e^{3z}-\cos(2yz)+h(z)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=F_3\Rightarrow -3x^2e^{3z}+\text{sen}\,(2yz)\,2y+h'(z)=-3x^2e^{3z}+\text{sen}\,(2yz)\,2y\Rightarrow h'(z)=0\Rightarrow h(z)=C$$

$$f(x,y,z)=3y\ln x-x^2e^{3z}-\cos(2yz)+C\quad\text{func. potencial}$$

Trabajo: $W=f(e,2,1)-f(1,0,1)$

5.-

Continuidad:

1) $f(0,0)=0$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Iterados $\to 0$ Por caminos: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x=y}}\dfrac{x|x|}{\sqrt{2x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x|x|}{\sqrt{2}|x|}=0$

Por def.

Dado $\varepsilon>0,\exists\delta>0\,/\,0<|x|<\delta$ y $0<|y|<\delta\overset{?}{\Rightarrow}\left|\dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|<\varepsilon$

$$\left|\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=|x|\underbrace{\left|\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}_{\le 1}\le|x|<\delta=\varepsilon\ \therefore\ \text{Dado }\varepsilon>0\text{ basta elegir }\delta=\varepsilon$$

El límite doble existe y vale 0, por tanto f es continua en (0,0)

Diferenciabilidad:

$$f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k=r(h,k)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=0$$

$$r(h,k)=\frac{h|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h|k|}{h^2+k^2}$$

Iterados $\to 0$

Camino $h=k$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h|h|}{2h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{\pm h^2}{2h^2}=\pm\frac{1}{2}\neq 0\,\therefore\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}\text{ no existe.}$$

La función **no** es diferenciable en (0,0).