<u>ANÁLISIS MATEMÁTICO II – FINAL 6/7/2013</u>

PARTE TEÓRICA

1.-Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz: $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ vale que: $(\vec{x}.\vec{y})^2 \leq (\vec{x}.\vec{x})\,(\vec{y}.\vec{y})$

2.- Demostrar la relación entre la derivada direccional y el gradiente:
Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U abierto, $(x_0, y_0) \in U$, diferenciable en (x_0, y_0) .y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ con $\|\mathbf{v}\| = 1$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v}$$

PARTE PRÁCTICA

3.- Verificar el teorema de Green, siendo $\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x)$ y $C: x^2 + y^2 = 4$.

4.- Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \mathbf{F}(x, y, z) = (1, h(x) + z - 2x, y)$ con $\mathbf{F}(1,1,1) = (1,2,1)$. Hallar $h(x)$ tal que la integral de línea de **F** a lo largo de una curva simple, regular *C* desde el punto *A* hasta *B*, no dependa de *C*.

5.- Si $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ que tiene por matriz jacobiana a $Jg(P) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$ y $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es otra función diferenciable tal que $\nabla(f \circ g)_{(P)} = (-9,17)$, determinar $\nabla f(g(P))$.

Resolución

3.-

a) Integral doble

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 2y = 1 - 2r\, sen\, t \qquad Polares: \begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\, sen\, t \end{cases} \quad R = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \quad |J| = r$$

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} (r - 2r^2\, sen\, t)\, dt\, dr = 4\pi$$

b) Integral de línea

$Polares \quad r(t) = (2\cos t, 2\, sen\, t) \;\; 0 \leq t \leq 2\pi$

$r'(t) = (-2\, sen\, t, 2\cos t) \qquad F(r(t)) = (4\, sen^2 t, 2\cos t) \to F.r' = -8\, sen^3 t + 4\cos^2 t$

$$\oint_C = \int_0^{2\pi} (-8\, sen^3 t + 4\cos^2 t)\, dt = 4\pi$$

4.-

$$rot\, F = \vec{0} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = (1 - 1, 0 - 0, h'(x) - 2 - 0) = (0,0,0)$$

$h'(x) = 2 \to h(x) = 2x + C$

$F(1,1,1) = (1,2,1) = (1, h(1) + 1 - 2, 1) \to h(1) = 3 \to h(1) = 2.1 + C \to C = 1 \therefore h(x) = 2x + 1$

5.-

$$\underbrace{J(f\circ g)_P}_{1\times 2} = \underbrace{Jf\big(g(P)\big)}_{1\times 2}\underbrace{Jg(P)}_{2\times 2}$$

$$(-9,17) = \left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2\dfrac{\partial f}{\partial x} - 5\dfrac{\partial f}{\partial y} = -9 \\ 2\dfrac{\partial f}{\partial x} + 8\dfrac{\partial f}{\partial y} = 17 \end{cases} \to \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2$$

$$\nabla f[g(P)] = \left(\frac{1}{2},2\right)$$