ANÁLISIS MATEMÁTICO II – FINAL 03/12/2013

Parte práctica:

3.- Verificar el teorema de Stokes con $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(x-z,x^3+yz,-3xy^2\right)$, S la superficie: $2-\sqrt{x^2+y^2}\geq 0\,,z=0$ y C su contorno.

4.- Encontrar los extremos absolutos de $f(x,y)=(x-2)^2+y^2$

en la región cerrada $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y^2-x\leq 9,3x-4y+12\leq 0,3x+4y+12\leq 0\right\}$

5.- Calcular la $\iint\limits_R x^3y^3dx\,dy$, siendo R la región limitada por las curvas de ecuaciones: $x^2+y^2=2,x^2+y^2=4$, $x^2-y^2=1$, $x^2-y^2=2$ en el primer cuadrante. Usar el cambio de variables: $u=x^2+y^2\,,v=x^2-y^2$.

RESOLUCIÓN

3.-

a) $\oint F\,dr$

$2-\sqrt{x^2+y^2}\geq 0\Leftrightarrow x^2+y^2\leq 4,z=0$, es un círculo de radio 2 en el plano *xy*. Parametrizamos la curva frontera con coordenadas polares.

$r(t)=\left(2\cos t,2\,sen\,t,0\right);0\leq t\leq 2\pi$

$r'(t)=\left(-2\,sen\,t,2\cos t,0\right)\quad F[r(t)]=\left(2\cos t,8\cos^3 t,-24\cos t\,sen^2 t\right)$

$F.r'=-4\,sen\,t\cos t+16\cos^4 t$

$\oint_C F.dr=\int_0^{2\pi}(-4\,sen\,t\cos t+16\cos^4 t)\,dt=12\pi$

b) $rot\,F=\left(-6xy-y,-1+3y^2,3x^2\right)$

La superficie es un círculo de radio 2, en el plano *xy*.

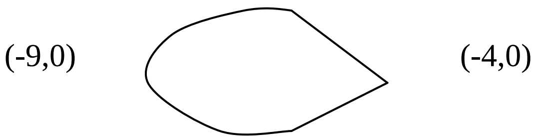
$r(u,v)=\left(u\cos v.u\,sen\,v,0\right);\ 0\leq u\leq 2\,;0\leq v\leq 2\pi$

$T_u=\left(\cos v,sen\,v,0\right)\ \ T_v=\left(-u\,sen\,v,u\cos v.0\right)\quad N=T_u\times T_v=\left(0.0.u\right)$

$rot\,F(u,v)=\left(-6u^2\cos v\,sen\,v-u\,sen\,v,1+3u^2sen^2v,3u^2\cos^2 v\right);rotF.N=3u^3\cos^2 v$

$\iint_S rotF.N=\int_0^2\int_0^{2\pi}3u^3\cos^2 v\,dv\,du\quad=12\pi$

4.-



La región R está limitada por el arco de parábola $y^2=9+x$ y las rectas $3x-4y=12,3x+4y=12$.

Tenemos que analizar la existencia de extremos dentro de la región, en los bordes y en los vértices.

a)

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-4=0\rightarrow x=2$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2y=0\rightarrow y=0$

$P_1=(2,0)\notin R$

b) Bordes

$y^2 = 9 + x \Rightarrow y = \pm\sqrt{9+x}$ para no tener que analizar los dos casos por separado, usamos Lagrange

$F(x, y, \lambda) = (x-2)^2 + y^2 + \lambda\left(y^2 - x - 9\right)$

$(1)\, \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2(x-2) - \lambda = 0$

$(2)\, \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y - 2\lambda y = 0 \Rightarrow 2y(1-\lambda) = 0 \Rightarrow y = 0 \quad o \quad \lambda = 1$

$(3)\, \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = y^2 - x - 9 = 0$

Si $y = 0$ sustituyendo en $(3) \Rightarrow x = -9 \Rightarrow P_2 = (-9{,}0)$

$f(-9{,}0) = 121$

Si $\lambda = 1$ en (1) $2(x-2) - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5}{2} \notin R$

$y = \dfrac{-3x-12}{4}$

$f\left(x, \dfrac{-3x-12}{4}\right) = (x-2)^2 + \left(\dfrac{-3x-12}{4}\right)^2 \rightarrow f' = \dfrac{25}{8}x + \dfrac{1}{2} = 0 \rightarrow x = -\dfrac{4}{25} \notin R$

$y = \dfrac{3x+12}{4}$

$f = (x-2)^2 + \left(\dfrac{3x+12}{4}\right)^2 \rightarrow f' = 0 \rightarrow x = -\dfrac{4}{41} \notin R$

c) Vértices

$P_3 = (-4{,}0) \rightarrow f(-4{,}0) = 36$

$P_{4,5} = \left(-\dfrac{56}{9}; \pm\dfrac{5}{3}\right) \rightarrow f\left(-\dfrac{56}{9}; \pm\dfrac{5}{3}\right) = \dfrac{5701}{81}$

Comparando todos los valores de la función en los puntos obtenidos podemos concluir que:

Máximo absoluto = 121 y lo alcanza en $P_2 = (-9{,}0)$

Mínimo absoluto = 36 y lo alcanza en $P_3 = (-4{,}0)$

5.-

$$R: \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 + y^2 = 4 \quad u = x^2 + y^2 \\ x^2 - y^2 = 1 \quad v = x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases} \qquad \overline{R} = \begin{cases} 2 \le u \le 4 \\ 1 \le v \le 2 \end{cases}$$

$\left.\begin{matrix} u = x^2 + y^2 \\ v = x^2 - y^2 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{ x = \sqrt{\dfrac{u+v}{2}} \qquad y = \sqrt{\dfrac{u-v}{2}} \right.$ como es en el primer cuadrante el signo es positivo.

$$\det J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{u+v}\sqrt{u-v}} \rightarrow \left|\det J\right| = \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{u+v}\sqrt{u-v}}$$

$$f(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{u-v}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\iint_R f\, dA = \iint_R f\,(u,v)\, \left|\det J(u,v)\right| dA = \int_1^2 \left[\int_2^4 \left(u^2 - v^2\right)\ du\right] dv \ = \frac{7}{16}$$