PARCIAL ANÁLISIS II - 4/6/2013 **Tema 1**

RESOLUCIÓN

1.- Hallar y clasificar, si existen, los puntos críticos de: $f(x,y)=x^3+y^3+3xy^2-4(x+y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-4=0$ (1)

$\frac{\partial f}{\partial y}=3y^2+6xy-4=0$ (2)

de (2) $3y^2=4-6xy$ en (1) $3x^2+4-6xy-4=0 \Leftrightarrow 3x(x-2y)=0 \Leftrightarrow x=0$ ó $x=2y$

Si $x=0$ en (2) $3y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ $P_1=\left(0,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ $P_2=\left(0,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Si $x=2y$ en (2) $3y^2=4-12y^2 \Leftrightarrow 15y^2=4 \Leftrightarrow y=\pm\frac{2}{\sqrt{15}}$ $P_3=\left(\frac{4}{\sqrt{15}},\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$ $P_4=\left(-\frac{4}{\sqrt{15}},-\frac{2}{\sqrt{15}}\right)$

Calculamos la matriz Hessiana y clasificamos:

$$Hf(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x+6y \end{pmatrix}$$

$Hf(P_1)=-\frac{144}{3}<0$ Pto. de silla $\qquad Hf(P_2)=-\frac{36}{9}<0$ Pto. de silla

$Hf(P_3)=\begin{pmatrix} \frac{24}{\sqrt{15}} & \frac{12}{\sqrt{15}} \\ \frac{12}{\sqrt{15}} & \frac{36}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}>0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}>0$ min. rel. $\qquad Hf(P_4)=\begin{pmatrix} -\frac{24}{\sqrt{15}} & -\frac{12}{\sqrt{15}} \\ -\frac{12}{\sqrt{15}} & -\frac{36}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}>0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}<0$ max. rel.

2.- Dada la función: $f(x,y,z)=e^{-x}-\frac{1-x}{y}-yz$

a) Comprobar que *f* define a *z* como función implícita de (x,y) en un entorno del punto $P=(0,1,0)$.

b) Calcular $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en dicho punto. c) Hacer *f* = 0, despejar *z* y verificar por derivación los resultados obtenidos en (b).

a)

- $f(0,1,0)=e^0-\frac{1}{1}-0=0$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(P)=-y(P)=-1\neq 0$
- $\frac{\partial f}{\partial x}=-e^{-x}+\frac{1}{y}$ $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1-x}{y^2}-z$ $\frac{\partial f}{\partial z}=-y$ son continuas en un entorno del $P=(0,1,0)$

Se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita.

b)

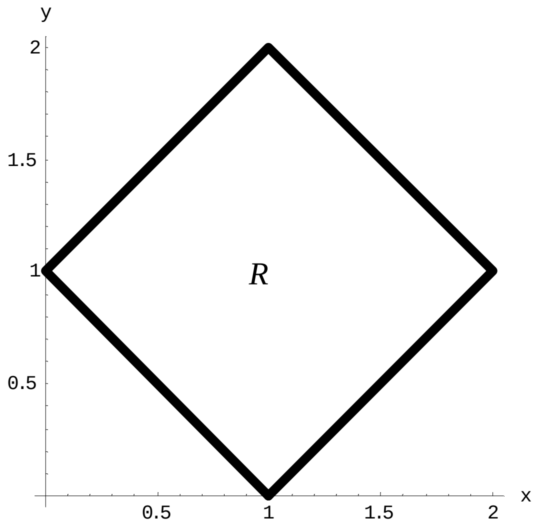
$$\frac{\partial z}{\partial x}(P)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(P)}{\frac{\partial f}{\partial z}(P)}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(P)=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(P)}{\frac{\partial f}{\partial z}(P)}=1$$

c)

$$f(x,y,z)=e^{-x}-\frac{1-x}{y}-yz=0 \Leftrightarrow z=\frac{-1+x}{y^2}+\frac{e^{-x}}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{y^2}-\frac{e^{-x}}{y}\Bigg|_{(0,1,0)}=0 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=(-1+x)(-2)y^{-3}-\frac{e^{-x}}{y^2}\Bigg|_{(0,1,0)}=1$$

3.- Haciendo el cambio de variables $x=\frac{u+v}{2}; y=\frac{u-v}{2}$, calcular $\iint_R (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\, dA$, siendo R el cuadrado de vértices: $(1,0)$, $(2,1)$, $(1,2)$ y $(0,1)$.



Obtenemos las ecuaciones de los lados del cuadrado y les aplicamos el cambio de variables:

$y=x+1 \leftrightarrow v=-1$

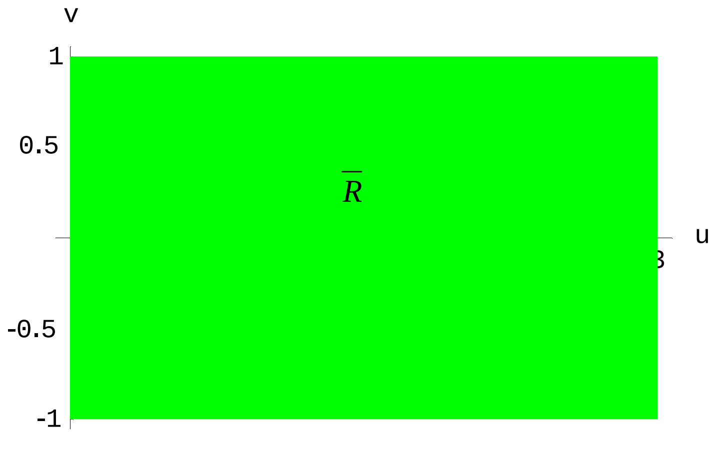
$y=x-1 \leftrightarrow v=1$

$y=-x+1 \leftrightarrow u=1$

$y=-x+3 \leftrightarrow u=3$

Con esto tenemos la región en el plano *u*-*v*.

$$\overline{R}=\begin{cases}-1\le v\le 1\\ 1\le u\le 3\end{cases}$$



Debemos calcular el Jacobiano de la transformación

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2}$$

$$f(u, v) = u^2 \operatorname{sen}^2 v$$

$$\iint_R (x+y)^2 \operatorname{sen}^2 (x-y)\, dA = \int_{-1}^{1} \left[\int_{1}^{3} u^2 \operatorname{sen}^2 v \ du \quad \right] dv = \frac{13}{3} [1 - \operatorname{sen}1 \cos 1]$$

4.- Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + 3x, 2y - x, z - 1)$, para trasladar una partícula de $P_1 = (1,2,-1)$ a $P_2 = (-5,4,-3)$, por el segmento de recta que los une.

$$W = \int_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$$

Parametrizamos el segmento de recta y resolvemos la integral de línea

$$\mathbf{r}(t) = (1-t)(1,2,-1) + t(-5,4,3) = (1-6t, 2+2t, -1-2t) \qquad 0 \le t \le 1$$
$$\mathbf{r}'(t) = (-6,2,-2)$$
$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)] = (7 - 10t + 4t^2, 3 + 10t, -2 - 2t)$$
$$\mathbf{F}[\mathbf{r}(t)].\mathbf{r}'(t) = -24t^2 + 84t - 32$$
$$W = \int_0^1 (-24t^2 + 84t - 32)dt \quad = 2$$