PRIMER RECUPERATORIO - 25/6/2012 **Tema 2**

1.- Dada $f:\Re^2 \to \Re^2 \,/\, f(x,y)=\left(5e^{4y}, 3e^{5x}+2e^{4y}\right)$, a) Probar que f es localmente inversible en un entorno de cada punto de $\Re^2$. b) Obtener f^{-1}. c) Comprobar que Jf y Jf^{-1} son matrices inversas en puntos correspondientes

2.- Calcular $\iint_S \mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS$, siendo $\mathbf{F}(x,y,z)=(3y,2x,z)$ y S el cono:

$z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}, 0 \le z \le 6$.

3.- Determinar y clasificar los extremos de $f(x,y)=x.y$, con la condición de que los puntos (x,y) verifiquen $g(x,y)=x^2+y^2-4=0$

4.- Calcular la $\oint_C \mathbf{F}.d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}$ el campo vectorial $\mathbf{F}(x,y)=\left(x^2, 2xy\right)$ y C el camino cerrado que va del $(5,0)$ al $(0,0)$ a lo largo del eje x, del $(0,0)$ al $(0,4)$ a lo largo del eje y, y de regreso del $(0,4)$ al $(5,0)$ por la curva $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ en sentido antihorario.

RESOLUCIÓN

1.-

a)

$f(x,y)=\left(5e^{4y}, 2e^{4y}+3e^{5x}\right)$

$Jf(x,y)=\begin{pmatrix} 0 & 20e^{4y} \\ 15e^{5x} & 8e^{4y} \end{pmatrix} \to \det Jf(x,y)=-300e^{5x}e^{4y} \neq 0 \;\; \forall (x,y)\in \Re^2$

Por lo tanto f es inversible alrededor de cada punto del plano.

b)

$u=5e^{4y} \to \frac{u}{5}=e^{4y} \to y=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{u}{5}\right)$

$v=3e^{5x}+2e^{4y} \to v=3e^{5x}+\frac{2}{5}u \to v-\frac{2}{5}u=3e^{5x} \to x=\frac{1}{5}\ln\left[\frac{1}{3}\left(v-\frac{2}{5}u\right)\right]$

$f^{-1}(u,v)=\left(\frac{1}{5}\ln\left[\frac{1}{3}\left(v-\frac{2}{5}u\right)\right], \frac{1}{4}\ln\left(\frac{u}{5}\right)\right)$

c)

$$Jf^{-1}(u,v)=\begin{pmatrix} \dfrac{-2}{75\underbrace{\frac{1}{3}\left(v-\frac{2}{5}u\right)}_{e^{5x}}} & \dfrac{1}{15\underbrace{\frac{1}{3}\left(v-\frac{2}{5}u\right)}_{e^{5x}}} \\ \dfrac{1}{20\underbrace{\left(\frac{u}{5}\right)}_{e^{4y}}} & 0 \end{pmatrix} \to Jf^{-1}(x,y)=\begin{pmatrix} \dfrac{-2}{75e^{5x}} & \dfrac{1}{15e^{5x}} \\ \dfrac{1}{20e^{4y}} & 0 \end{pmatrix}$$

$Jf(x,y)\,Jf^{-1}(x,y)=Jf^{-1}(x,y)\,Jf(x,y)=I$

Son matrices inversas.

2.- Parametrizamos la superficie cónica usando coordenadas cilíndricas
$x = r\cos t\,;\, y = r\,\mathrm{sen}\,t\,;\, z = z$

Reemplazando en la ecuación del cono nos queda: $z = \left(r^2\right)^{\frac{1}{2}} = r$
Entonces la parametrización es: $r(t,z) = \left(z\cos t, z\ \mathrm{sen}\,t, z\right); 0 \le t \le 2\pi, 0 \le z \le 6$
Hallamos el vector normal:

$T_t = \left(-z\,\mathrm{sen}\,t, z\cos t, 0\right)$

$T_z = \left(\cos t, \mathrm{sen}\,t, 1\right)$

$N = T_t \times T_z = \left(z\cos t, z\,\mathrm{sen}\,t, -z\right)$

$F\left[r(t,z)\right] = \left(3z\,\mathrm{sen}\,t, 2z\cos t, z\right)$

$F.N = 5z^2\ \mathrm{sen}\,t\cos t - z^2$

$$\iint_S F.N = \int_0^6 \int_0^{2\pi} \left(5z^2\ \mathrm{sen}\,t\cos t - z^2\right) dt\, dz = \int_0^6 2\pi\ \left(-z^2\right) dz = -144\pi$$

3.- Multiplicadores de Lagrange

$f(x,y) = xy \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$

$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda\left(x^2 + y^2 - 4\right)$

$L_x = y + 2\lambda x = 0$ (1)

$L_y = x + +2\lambda y = 0$ (2)

$L_\lambda = x^2 + y^2 - 4 = 0$ (3)

$(1)-(2) \to (y-x) - 2\lambda(y-x) = 0 \to (y-x)(1-2\lambda) = 0 \to x = y \ o\ \lambda = \dfrac{1}{2}$

$si\ x = y\ en\ (3)\ 2x^2 = 4 \to x = \pm\sqrt{2}$

$P_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \qquad P_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$

$si\ \lambda = \dfrac{1}{2}\ en\ (1) \to x = -y$

$P_3 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \qquad P_4 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$$\overline{H}(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

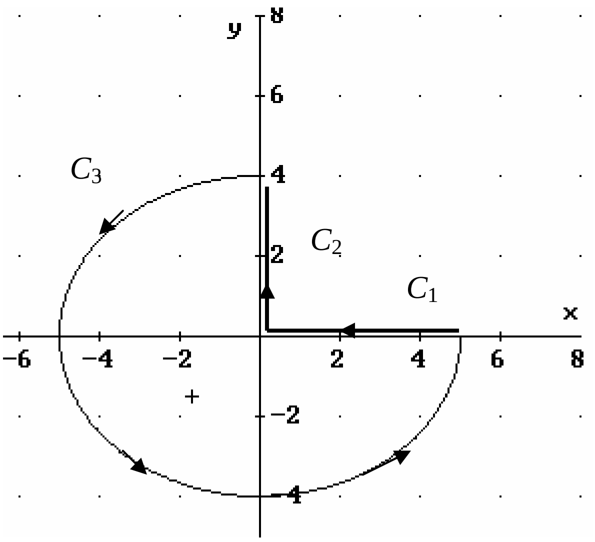
$P_1 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \qquad \lambda_1 = -\dfrac{1}{2} \to \left|\overline{H}(x,y,\lambda)\right| > 0 \to \max\ \text{condicionado}$

$P_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \lambda_1 = -\dfrac{1}{2} \to \left|\overline{H}(x,y,\lambda)\right| > 0 \to \max\ \text{condicionado}$

$P_3 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad \lambda = \dfrac{1}{2} \to \left|\overline{H}(x,y,\lambda)\right| < 0 \to \min\ \text{condicionado}$

$P_4 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \lambda = \dfrac{1}{2} \to \left|\overline{H}(x,y,\lambda)\right| < 0 \to \min\ \text{condicionado}$

4.-



$r_1(t) = (t,0) \quad t: 5 \to 0$

$r_1'(t) = (1,0) \quad F[r_1(t)] = (t^2,0) \to F.r' = t^2 \to \int_{C_1} = \int_5^0 t^2 \quad dt = -\dfrac{125}{3}$

$r_2(t) = (0,t) \quad t: 0 \to 4$

$r_2'(t) = (0,1) \quad F[r_2(t)] = (0,0) \to F.r' = 0 \to \int_{C_2} = 0$

$r_3(t) = (5\cos t, 4\,\text{sen}\, t) \quad t: \dfrac{\pi}{2} \to 2\pi$

$r_3'(t) = (-5\,\text{sen}\, t, 4\cos t) \quad F[r_3(t)] = (25\cos^2 t, 40\,\text{sen}\, t \cos t) \to F.r' = 35\cos^2 t\,\text{sen}\, t$

$\int_{C_3} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} 35\cos^2 t\,\text{sen}\, t \quad dt = -\dfrac{35}{3}$

$\oint_C F.dr = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = -\dfrac{160}{3}$