PARCIAL ANÁLISIS II - 9/6/2012

Tema 2

1.- Dada la función $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen} x - y}{x-\operatorname{sen} y} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ calcular $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)$

2.- Sea $f(x,y)=2x^3-4xy+2y^3$, sabiendo que $y=f(x)$, usar el Teor. de la función implícita para calcular $y''(1)$

3.- Si $f(x,y,z)=\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{3}{2}x^2-3xy+2y+z^3-3z+7$, hallar, si existen, todos sus puntos críticos y clasificarlos.

4.- Dada la integral $\int_{\sqrt{2}}^{2}\left[\int_{\sqrt{4-x^2}}^{x} x\,y\,dy\right]dx+\int_{2}^{\sqrt{8}}\left[\int_{0}^{x} x\,y\,dy\right]dx+\int_{\sqrt{8}}^{4}\left[\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} xy\,dy\right]dx$, a) Dibujar la región de integración. b) Pasarla a coordenadas polares. c) Calcular la integral obtenida en (b).

<u>RESOLUCIÓN</u>

1.-

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](0.0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h,0)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}\qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=?$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{-1(x-sen\,y)-(sen\,x-y)(-\cos y)}{(x-sen\,y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(h,0)=\frac{-h+sen\,h}{h^2}\qquad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,0+k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{\overbrace{\frac{-k}{-sen\,k}}^{1}-1}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{1-1}{k}=0\qquad (3)$$

$reemplazando\ (2)\ y\ (3)\ en\ (1)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{-h+sen\,h}{h^3}=\frac{0}{0}\qquad l'\,Hopital$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{-1+\cos h}{3h^2}=\frac{0}{0}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{-sen\ h}{6h}=\frac{0}{0}\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{-\cos h}{6}=-\frac{1}{6}$$

2.- $f(x,y)=2x^3-4xy+2y^3$

Por el Teor. de la función implícita: $\exists(x_0,y_0)\,/\,f(x_0,y_0)=0\ \ y\ \ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$

como nos piden $y''(1)$, sabemos que $x_0=1$, falta calcular y_0

$f(1,y_0)=0 \rightarrow 2.1^3-4.1y_0+2y_0{}^3=0 \rightarrow y_0{}^3-2y_0+1=0$

Esta última ecuación tiene 3 raíces reales: $y_0=1 \;\; y_{1.2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, podemos elegir la mas sencilla y usar el punto P = (1 , 1).

Ahora calculamos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1{,}1)=(-4x+6y)_{(1,1)}=2\neq 0$$

Entonces es aplicable el Teor. de la func. impl. en P = (1 , 1).

$$y'(1)=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(1{,}1)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(1{,}1)}=-\left.\frac{6x^2-4y}{-4x+6y}\right|_{(1,1)}=-\frac{2}{2}=-1$$

Ahora calculamos la derivada segunda de y, usando reglas de derivación y recordando que, como $y=f(x)$, cada vez que encontremos y para derivar tenemos que usar regla de la cadena.

$$y''(x)=-\left[\frac{(12x-4y')(-4x+6y)-(6x^2-4y)(-4+6y')}{(-4x+6y)^2}\right]$$

$$y''(1)=-13$$

3.- $f(x,y,z)=\dfrac{1}{3}y^3+\dfrac{3}{2}x^2-3xy+2y+z^3-3z+7$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=3x-3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=y^2-3x+2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3z^2-3$$

$$\begin{cases}3x-3y=0 \;\; (1)\\ y^2-3x+2=0 \;\; (2)\\ 3z^2-3=0 \;\; (3)\end{cases}$$

$de\ (1)\;\; x=y;\ reempl.\ en\ (2)\;\; x^2-3x+2=0 \rightarrow x_1=1 \quad y \quad x_2=2$

$de\ (3)\;\; z^2=1 \rightarrow z=\pm 1$

$P_1=(1.1.1)\;\; P_2=(2{,}2{,}1)\;\; P_3=(1{,}1{,}-1) \quad y \quad P_4=(2{,}2{,}-1)$

$Clasif.$

$$H_3f(x,y,z)=\begin{pmatrix}3&-3&0\\-3&2y&0\\0&0&6z\end{pmatrix} \quad H_2f(x,y,z)=\begin{pmatrix}3&-3\\-3&2y\end{pmatrix} \quad H_1f(x,y,z)=3$$

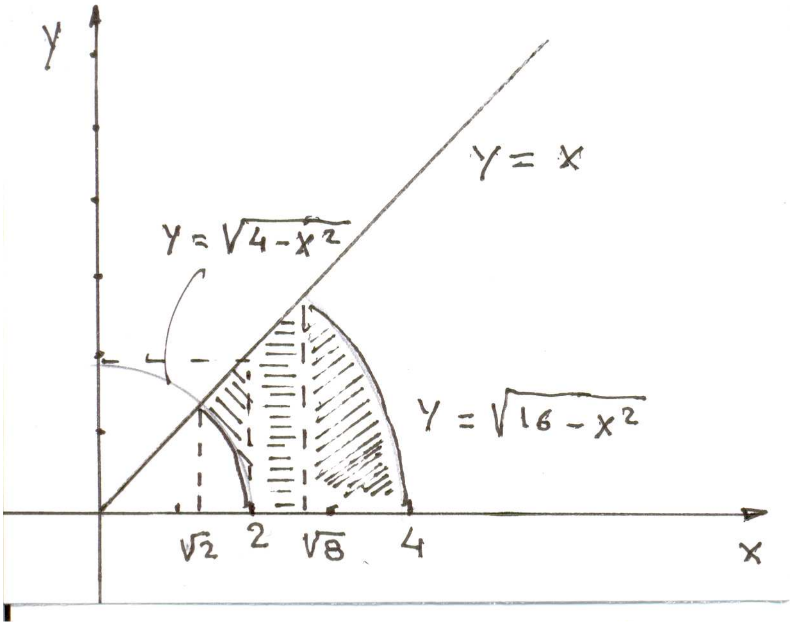
Tenemos que evaluar en los cuatro puntos y ver los signos de los determinantes en cada caso:

$H_3(P_1) = -18 < 0 \quad H_2(P_1) = -3 < 0 \quad H_1(P_1) = 3 > 0 \to Pto\ de\ silla$
$H_3(P_2) = 18 > 0 \quad H_2(P_2) = 3 > 0 \quad H_1(P_2) = 3 > 0 \to \min\ relativo$
$H_3(P_3) = 18 > 0 \quad H_2(P_3) = -3 < 0 \quad H_1(P_1) = 3 > 0 \to Pto\ de\ silla$
$H_3(P_4) = -18 < 0 \quad H_2(P_4) = 3 > 0 \quad H_1(P_1) = 3 > 0 \to Pto\ de\ silla$

4.- $\int_{\sqrt{2}}^{2}\left[\int_{\sqrt{4-x^2}}^{x} x\,y\,dy\right]dx + \int_{2}^{\sqrt{8}}\left[\int_{0}^{x} x\,y\,dy\right]dx + \int_{\sqrt{8}}^{4}\left[\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} xy\,dy\right]dx$

a) Dibujar la región de integración

$$R_1 = \begin{cases} \sqrt{2} \le x \le 2 \\ \sqrt{4-x^2} \le y \le x \end{cases} \qquad R_2 = \begin{cases} 2 \le x \le \sqrt{2}8 \\ 0 \le y \le x \end{cases} \qquad R_3 = \begin{cases} \sqrt{8} \le x \le 4 \\ 0 \le y \le \sqrt{16-x^2} \end{cases}$$



$$\overline{R} = \begin{cases} 2 \le r \le 4 \\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases} \qquad f(r,t) = r\cos t\ r\,sen\,t \quad |J| = r$$

b)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_2^4 r\cos t\ r\,sen\,t\ \ r\quad dr\right]dt$$

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_2^4 r\cos t\ r\,sen\,t\ \ r\ dr\right]dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\,t\cos t\ \left.\frac{r^4}{4}\right|_2^4 dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\,t\cos t\ \left(\frac{4^4-2^4}{4}\right)dt =$$

$$= 60\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\,t\cos t\quad dt = 60.\frac{1}{2}\left.sen^2 t\right|_0^{\frac{\pi}{4}} = 15$$