Análisis Matemático II – Parcial 5/6/2014 **Tema 2**

1.- Hallar los extremos absolutos de $f(x,y)=xy$ en la región $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\le 4, y\ge -\frac{5}{3}\right\}$.

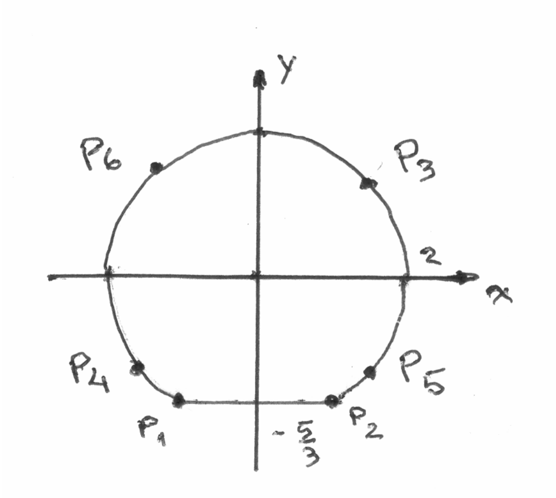
2.- Dada la superficie $\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}y^2+z^2=7$ obtener las ecuaciones de los planos tangentes a ella que son paralelos al plano $\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}y+2z=0$, indicando también los puntos de tangencia.

3.- Calcular la $\oint_C y^2dx+x^2\,dy$ siendo C la frontera de la región $R=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / y\ge\frac{1}{9}x^2, x\le 3, y^2\le 3x\right\}$, recorrida en sentido antihorario.

4.- Calcular la $\iint_R\left(\frac{x}{y}\right)^3 dA$, siendo R la región limitada por: $y=\sqrt{2x}, y=\sqrt{3x}, 2y=x^2, 4y=x^2$, usando el cambio de variables: $x=u^{1/3}v^{2/3}$, $y=u^{2/3}v^{1/3}$.

RESOLUCIÓN

1.- Dibujamos la región A y calculamos los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta.



$x^2+y^2=4$; $y=-\frac{5}{3}$

$x^2+\frac{25}{4}=4\rightarrow x^2=\frac{11}{9}\rightarrow x_1=-\frac{\sqrt{11}}{3}\quad x_2=\frac{\sqrt{11}}{3}$

$P_1=\left(-\frac{\sqrt{11}}{3},-\frac{5}{3}\right)\qquad P_2=\left(\frac{\sqrt{11}}{3},-\frac{5}{3}\right)$

Extremos globales:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial f}{\partial x}=y=0\\ \frac{\partial f}{\partial y}=x=0\end{array}\right\}\rightarrow P=(0,0)\in A\rightarrow H=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1<0\rightarrow \text{punto de silla}$$

Extremos en la frontera:

$a)\ y=-\frac{5}{3}$

$f\left(x,-\frac{5}{3}\right)=-\frac{5}{3}x$

como es lineal los max y min se dan en los extremos del segmento

$f(P_1)=\frac{5\sqrt{11}}{9}\qquad f(P_2)=-\frac{5\sqrt{11}}{9}$

$b)\ x^2+y^2=4$

Usamos Lagrange

$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(x^2+y^2-4)$

$\left.\begin{array}{l} L_x=y+2\lambda x=0 \quad (1) \\ L_y=x+2\lambda y=0 \quad (2) \end{array}\right\} (1)-(2)\rightarrow y-x-2\lambda(y-x)=0\rightarrow(y-x)(1-2\lambda)=0\rightarrow x=y \quad o \quad \lambda=\frac{1}{2}$

$L_\lambda=x^2+y^2-4=0 \ \ (3)$

$Si \ \ x=y \ \ en \ \ (3)\rightarrow x^2=2\rightarrow x=\pm\sqrt{2}\rightarrow \ P_3=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \quad P_4=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\rightarrow f(P_3)=f(P_4)=2$

$Si \ \ \lambda=\frac{1}{2} \ \ en\,(1)\rightarrow x=-y\rightarrow P_5=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \ \ P_6=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)\rightarrow f(P_5)=f(P_6)=-2$

Máximo absoluto = 2 se alcanza en $P_3=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right) \quad P_4=\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$

Mínimo absoluto = -2 se alcanza en $P_5=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right) \quad P_{64}=\left(-\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$

2.-

Para que los planos tangentes a la superficie sean paralelos al plano dado el vector ∇f debe ser paralelo al vector normal del plano

$\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\left(\frac{2}{3}x_0,\frac{4}{3}y_0,2z_0\right) \qquad N=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},2\right)$

$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \ // \ N\leftrightarrow\nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda N$

$\frac{2}{3}x_0=\frac{1}{3}\lambda\rightarrow x_0=\frac{1}{2}\lambda$

$\frac{4}{3}y_0=\frac{4}{3}\lambda\rightarrow y_0=\lambda$

$2z_0=2\lambda\rightarrow z_0=\lambda$

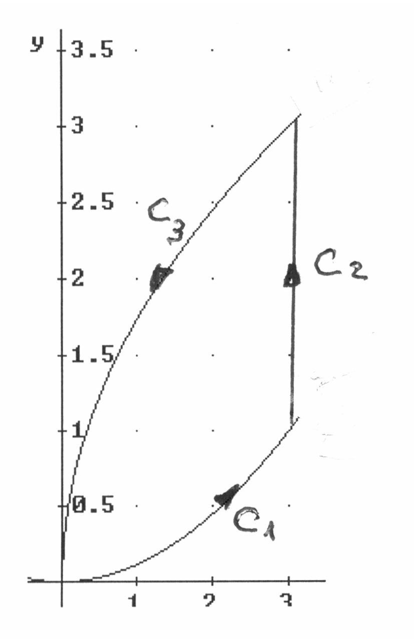
Reemplazamos en la ec. de la superficie y nos queda

$\lambda^2=4\rightarrow\lambda=\pm 2$

$Si \ \ \lambda=2\rightarrow P_1=(1,2,2) \qquad \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}y+2z=7$

$Si \ \ \lambda=-2\rightarrow P_2=(-1,-2,-2) \qquad \frac{1}{3}x+\frac{4}{3}y+2z=-7$

3.-



Usando Green:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x-y)$$

$$R:\begin{cases}0\le x\le 3\\ \frac{1}{9}x^2\le y\le\sqrt{3x}\end{cases}$$

$$\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=2\int_0^2\left[\int_{1/9 x^2}^{\sqrt{3x}}(x-y)\,dy\right]dx=\frac{21}{5}$$

Usando integrales de línea:

$$C_1:\ y=\frac{1}{9}x^2\to r_1(t)=\left(t,\frac{1}{9}t^2\right)\quad 0\le t\le 3\to r_1'(t)=\left(1,\frac{2}{9}t\right)\to F[r_1(t)]=\left(\frac{1}{81}t^4,t^2\right)\to F.r_1'=\frac{1}{81}t^4+\frac{2}{9}t^3$$

$$\int_{C_1}=\int_0^3\left(\frac{1}{81}t^4+\frac{2}{9}t^3\right)dt=\frac{51}{10}$$

$$C_2:r_2(t)=(3,1)(1-t)+(3,3)t=(3,1+2t)\quad 0\le t\le 1\to r_2'(t)=(0,2)\to F[r_2(t)]=\left((1+2t)^2,9\right)\to F.r_2'=18$$

$$\int_{C_2}=\int_0^1 18\ \ dt=18$$

$$C_3:y=\sqrt{3x}\qquad r_3(t)=\left(a+b-t,\ f(a+b-t)\right)=\left(3-t,\sqrt{3}\sqrt{3-t}\right)\quad 0\le t\le 3\to r_3'(t)=\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3-t}}\right)$$

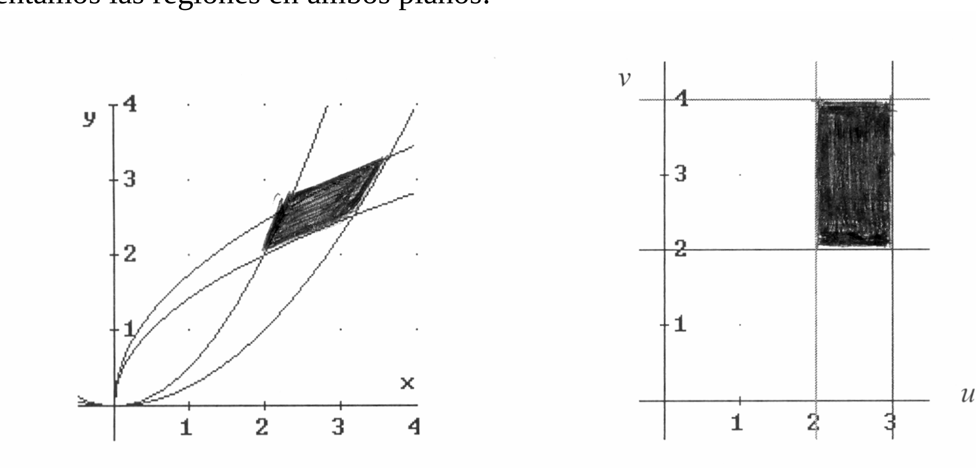
$$F[r_3(t)]=\left(9-3t,(3-t)^2\right)\to F.r_3'=3t-9-\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^{3/2}$$

$$\int_{C_3}=\int_0^3\left(3t-9-\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^{3/2}\right)\ dt=-\frac{189}{10}$$

$$\oint_C=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_3}=\frac{21}{5}$$

4.-

Dibujamos la gráfica de la región limitada por las curvas dadas, transformamos cada borde usando el cambio de variables y representamos las regiones en ambos planos:



$$y=\sqrt{2x}\rightarrow y^2=2x\rightarrow u^{4/3}v^{2/3}=2u^{1/3}v^{2/3}\rightarrow u=2$$

$$y=\sqrt{3x}\rightarrow u=3$$

$$2y=x^2\rightarrow 2u^{2/3}v^{1/3}=u^{24/3}v^{4/3}\rightarrow v=2$$

$$4y=x^2\rightarrow v=4$$

$$\overline{R}:\begin{cases}2\le u\le 3\\ 2\le v\le 4\end{cases}$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{1}{3}u^{-2/3}v^{2/3} & \frac{2}{3}u^{1/3}v^{-1/3}\\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{2/3}v^{-2/3}\end{vmatrix}=-\frac{1}{3}\rightarrow |J|=\frac{1}{3}$$

$$f(u,v)=\frac{v}{u}$$

$$\iint_R f\,dA=\frac{1}{3}\int_2^4\left[\int_2^3\frac{v}{u}du\right]dv=2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$