ANÁLISIS MATEMÁTICO II – PARCIAL 2015 - RESUELTO TEMA 1

1.- Si $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ analizar: a) continuidad de f en (0,0); b) diferenciabilidad de f en (0,0).

2.- Hallar los extremos absolutos de $f(x,y)=(x-3)^2+y^2$, en la región cerrada común a $x+2\geq\frac{1}{6}y^2;\ x\leq 4$.

3.- Calcular el área del recinto situado en el primer cuadrante limitado por las curvas: $y^3=2x^2$, $y^3=x^2$; $xy^2=3$; $xy^2=2$. Usando el cambio de variables: $x=u^{-\frac{2}{7}}v^{\frac{3}{7}}$; $y=u^{\frac{1}{7}}v^{\frac{2}{7}}$.

4.- Calcular la $\oint_C \mathbf{F}.\mathbf{dr}$ siendo $\mathbf{F}(x,y)=\left(\dfrac{y^2}{x^2+y^2},\dfrac{-x^2}{x^2+y^2}\right)$, donde C es la curva que va del (3,0) al (0,0) a lo largo del eje x, del (0,0) al (0,3) a lo largo del eje y, y del (0,3) al (3,0) por la curva $x^2+y^2=9$ en sentido antihorario.

Resolución:

1.- a) Continuidad: los límites iterados y por el camino $x = y$ dan 0, así que probaremos por definición si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{5x^3}{x^2+y^2}=0$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\,/\,|x|<\delta;|y|<\delta\text{ y }(x,y)\neq(0,0)\overset{?}{\Rightarrow}\left|\frac{5x^3}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{5x^3}{x^2+y^2}-0\right|=5\underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|}_{\leq 1}|x|<5\delta=\varepsilon$$

Por tanto, dado $\varepsilon>0$ basta elegir $\delta=\frac{\varepsilon}{5}$ para demostrar que el límite vale cero, f es continua en (0,0).

b) Diferenciabilidad

$$r(h,k)=f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{5h^3}{h^2+0}}{h}=5\qquad\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0.k)-f(0,0)}{k}=0$$

$$r(h,k)=\frac{5h^3}{h^2+k^2}-5h=\frac{5h^3-5h^3-5hk^2}{h^2+k^2}=\frac{-5hk^2}{h^2+k^2}\qquad\lim_{(h,h)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}\overset{?}{=}0$$

$$\text{iterados}\to 0;\ \lim_{(h,h)\to(0,0)}\frac{-5hk^2}{\left(h^2+k^2\right)^{3/2}}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h=k}}\frac{-5h^3}{\left(2h^2\right)^{3/2}}=\pm\frac{5}{\sqrt{8}}\ \therefore\ \lim_{(h,h)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}\text{ no existe.}$$

La función no es diferenciable en (0,0).

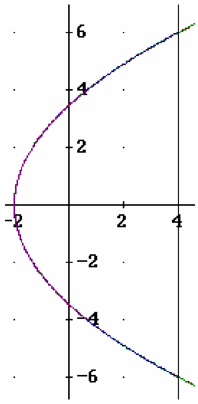
2.- $f(x,y)=(x-3)^2+y^2$

Global

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2(x-3)=0\to x=3\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y=0\to y-0\end{cases}\qquad P=(3,0)\qquad H=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4>0\ \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(3,0)>0\to\text{min rel en }(3,0)$$

$$f(3,0)=0$$

Frontera:



$x = 4$

$f(4, y) = 1 + y^2 = F(y)$

$F'(y) = 2y = 0 \rightarrow y = 0 \quad P = (4,0)$

$F''(y) = 2 > 0 \rightarrow \text{min en } P = (4,0) \qquad f(4,0) = 1$

$x = \frac{1}{6}y^2 - 2$

$f\left(\frac{1}{6}y^2 - 2, y\right) = \left(\frac{1}{6}y^2 - 5\right)^2 + y^2 = G(y)$

$G'(y) = 2\left(\frac{1}{6}y^2 - 5\right)\frac{1}{3}y + 2y = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}y^2 - 5\right) + 2\right]y = 0 \rightarrow y = 0 \text{ o } y = \pm\sqrt{12}$

$y = 0 \rightarrow x = -2 \therefore P_1 = (-2,0) \qquad y = \pm\sqrt{12} \rightarrow x = 0 \therefore P_2 = (0, \sqrt{12}); P_3 = (0. -\sqrt{12})$

$G''(y) = \frac{1}{3}y^2 - \frac{4}{3} \qquad G''(0) = -\frac{4}{3} < 0 \,\text{max} \qquad f(-2.0) = 25$

$G''(\pm\sqrt{12}) = \frac{8}{3} > 0 \text{ min} \quad f(0. \pm \sqrt{12}) = 23$

Vértices

$V_1 = (4,6) \quad V_2 = (4,-6)$

$f(4,6) = 37 \qquad f(4,-6) = 37$

Finalmente:

Máximo absoluto = 37 y se alcanza en $V_1 = (4,6) \quad V_2 = (4,-6)$

Mínimo absoluto = 0 y se alcanza en $(3,0)$

3.-

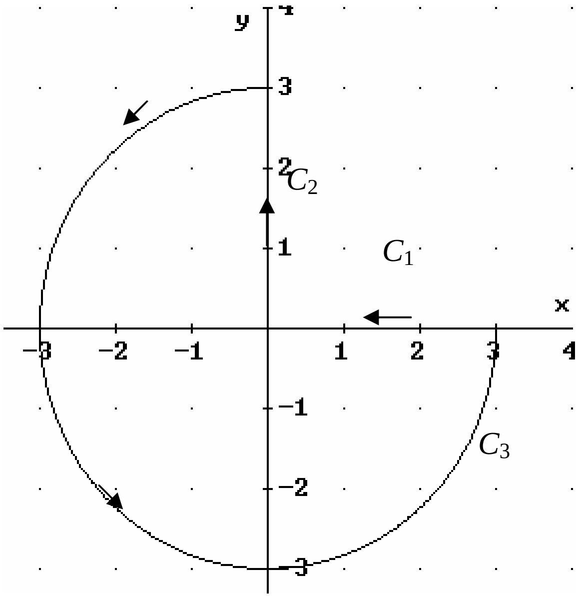
$y^3 = 2x^2 \rightarrow u = 2 \qquad xy^2 = 3 \rightarrow v = 3$

$y^3 = x^2 \rightarrow u = 1 \qquad xy^2 = 2 \rightarrow v = 2$

$$J = \begin{vmatrix} -\frac{2}{7}u^{-\frac{9}{7}}v^{\frac{3}{7}} & \frac{3}{7}u^{-\frac{2}{7}}v^{-\frac{4}{7}} \\ \frac{1}{7}u^{-\frac{6}{7}}v^{\frac{2}{7}} & \frac{2}{7}u^{\frac{1}{7}}v^{-\frac{5}{7}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}u^{-\frac{8}{7}}v^{-\frac{2}{7}} \rightarrow |J| = \frac{1}{7}u^{-\frac{8}{7}}v^{-\frac{2}{7}}$$

$$A(R) = \int_1^2 \int_2^3 \frac{1}{7}u^{-\frac{8}{7}}v^{-\frac{2}{7}} \, dv \quad du \quad = \frac{7}{5}\left(3^{\frac{5}{7}} - 2^{\frac{5}{7}}\right)\left(1 - 2^{-\frac{1}{7}}\right)$$

4.-



$C_1: r_1(t) = (3,0)(1-t) + (0,0)t = (3-3t,0)\,; 0 \le t \le 1$

$r_1'(t) = (-3,0)$

$F(r_1(t)) = (0,-1) \to F.r_1' = 0 \to \int_{C_1} = 0$

$C_2: r_2(t) = (0,0)(1-t) + (0,3)t = (0,3t)\,; 0 \le t \le 1$

$r_2'(t) = (0,3)$

$F(r_2(t)) = (1,0) \to F.r_2' = 0 \to \int_{C_2} = 0$

$C_3: r_3(t) = (3\cos t, 3\,\text{sen}\, t)\ ;\ \frac{\pi}{2} \le t \le 2\pi$

$r_3'(t) = (-3\,\text{sen}\, t, 3\cos t)$

$F(r_3(t)) = (\text{sen}^2 t, -\cos^2 t)$ $\qquad F(r_3(t))\ r_3'(t) = -3\left(\text{sen}^3 t + \cos^3 t\right) \to \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} -3\left(\text{sen}^3 t + \cos^3 t\right)dt = 4$

$\oint_C F\,dr = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} = 0 + 0 + 4 = 4$