Análisis Matemático II – Primer recuperatorio 19/6/2014 **Tema 1**

1.- Analizar la continuidad y la diferenciabilidad de la siguiente función en $P=(0,0)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy\,\text{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2.- Dada la función $f(x,y)=\left(\frac{1}{2}\ln(x-y)\,,\frac{1}{4}\ln y\right)$. a) Probar que es inversible en un entorno del punto $P=(2,1)$, b) Obtener la función inversa. c) Verificar que Jf y Jf^{-1} son matrices inversas en $P=(2,1)$ y su punto correspondiente.

3.- Hallar el flujo del campo $\mathbf{F}(x,y,z)=(2y,3x,2z)$ a través de la superficie lateral del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}\,, z\leq 3$.

4.- Emplear una integral doble para calcular el área de la región común a:
$x+y^2-9\leq 0\,;x-y^2+9\geq 0$.

Resolución

1.-

a) Continuidad

Para que la función sea continua en el punto (0,0) el límite debe dar cero.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy\,\text{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\overset{?}{=}0$$

iterados $\to 0$ camino $y=x$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\,\text{sen}\sqrt{2x^2}}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2}\text{sen}\sqrt{2x^2}=0$

Por def.

$$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta\overset{?}{\Rightarrow}\left|\frac{xy\,\text{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon \qquad \text{vamos a usar que } \forall x, |\text{sen}\, x|<|x|$$

$$\left|\frac{xy\,\text{sen}\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2}\right|=\underbrace{\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}_{\leq 1}\underbrace{\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}_{\leq 1}\left|\text{sen}\sqrt{x^2+y^2}\right|<\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|<\delta$$

entonces dado $\varepsilon>0$ elegimos $\delta=\varepsilon$

Y queda probado que el límite vale 0, por lo que la función es continua en (0,0).

b) Diferenciabilidad

$$r(h,k)=f(h,k)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

$$r(h,k)=\frac{hk\,\text{sen}\sqrt{h^2+k^2}}{h^2+k^2}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk\,\text{sen}\sqrt{h^2+k^2}}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}} \qquad \text{iterados}\to 0;\ \text{camino}\ h=k\ \lim_{h\to 0}\frac{h^2\text{sen}\sqrt{2h^2}}{2h^2\sqrt{2h^2}}=\frac{1}{2}\neq 0$$

Por tanto el límite doble no existe y la función no es diferenciable en (0,0).

2.-

$$a)\ Jf(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2(x-y)} & \dfrac{-1}{2(x-y)}\\ 0 & \dfrac{1}{4y}\end{pmatrix}\to Jf(2,1)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & \dfrac{1}{4}\end{pmatrix}\to \det Jf(2,1)=\frac{1}{8}\neq 0$$

$$b)\,u=\frac{1}{2}\ln(x-y)$$

$$v=\frac{1}{4}\ln y\to 4v=\ln y\to y=e^{4v}$$

$$2u=\ln(x-y)\to x-y=e^{2u}\ \to x=e^{2u}\ +e^{4v}$$

$$f^{-1}(u,v)=\left(e^{2u}\ +e^{4v},e^{4v}\right)$$

$$c)\ f(2,1)=\left(\frac{1}{2}\ln 1,\frac{1}{4}\ln 1\right)=(0,0)$$

$$Jf^{-1}(u,v)=\begin{pmatrix}2e^{2u} & 4e^{4v}\\ 0 & 4e^{4v}\end{pmatrix}\to Jf^{-1}(0,0)=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & \dfrac{1}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ 0 & \dfrac{1}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

3.-

Parametrización del cono en coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases}x=r\cos t\\ y=r\,\mathrm{sen}\,t \quad\ \to z=\sqrt{x^2+y^2}\ =r\\ z=z\end{cases}$$

$$r(u,v)=\left(u\cos v,u\,\mathrm{sen}\,v,u\right)\quad 0\le u\le 3\quad 0\le v\le 2\pi$$

$$T_v\ =\left(-u\,\mathrm{sen}\,v,u\cos v,0\right)$$

$$T_u\ =\left(\cos v.\mathrm{sen}\,v,1\right)$$

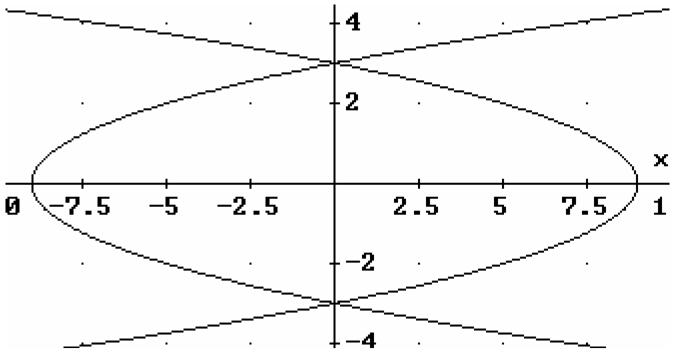
$$N=T_v\times T_u\ =\left(u\cos v,u\mathrm{sen}\,v,-u)\right)$$

$$F[r(u,v)]=\left(2u\mathrm{sen}\,v,3u\cos v,2u\right)$$

$$F.N=5u^2\mathrm{sen}\,v\cos v-2u^2$$

$$\iint_S F,N\,dS=\int_0^3\left[\int_0^{2\pi}\left(5u^2\mathrm{sen}\,v\cos v-2u^2\right)dv\quad\right]du=-36\pi$$

4.-



$$R = \begin{cases} -3 \leq y \leq 3 \\ y^2 - 9 \leq x \leq 9 - y^2 \end{cases}$$

$$A(R) = \int_{-3}^{3} \int_{y^2-9}^{9-y^2} dx\, dy = 72$$