SOLUCIONES del PRIMER RECUPERATORIO ANÁLISIS II - 18/6/2013 **Tema 1**

1.- Dada la siguiente función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^6}{\left(x^2-y\right)^2+x^6} & si\ \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$ a) Analizar si es continua en $P=(0,0)$. b) calcular, si existen, las derivadas parciales en dicho punto.

a)

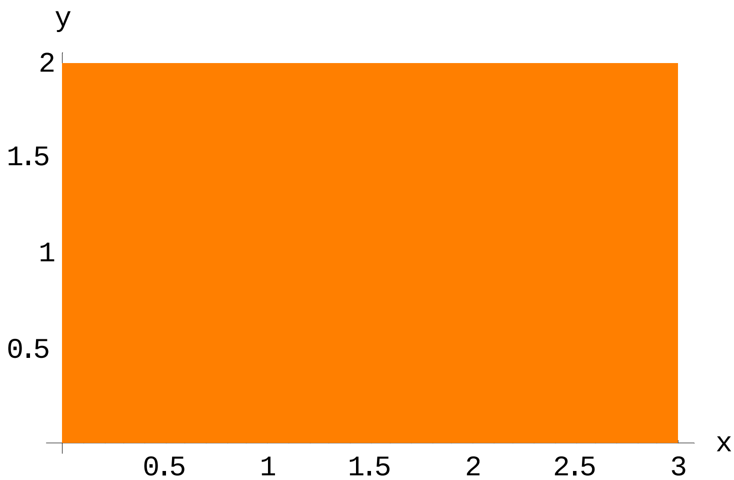
$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{\left(x^2-y\right)^2+x^6}=\lim_{y\to 0}0=0 \qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^6}{\left(x^2-y\right)^2+x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^4+x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^4(1+x^2)}=0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y+x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^6}{x^6}=1$$

Como el límite por el camino $y=x^2$ es distinto de los iterados, el límite doble **no existe**. Por tanto, *f* **no** es continua en (0,0).

b) $$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^6}{h^4+h^6}}{h}=0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{k}=0$$

2.- Hallar los extremos absolutos de $f(x,y)=x^2-2xy+2y$ en el rectángulo $R=\{(x,y)/0\le x\le 3, 0\le y\le 2\}$.



$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2y=0\Rightarrow x=y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2x+2=0\Rightarrow x=1 \qquad P=(1,1)$$

$$H=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}<0 \ \ \textit{Pto. silla en}\ (1,1)$$

Lados

$L_1: y=0 \quad 0\le x\le 3 \quad f(x,0)=x^2 \quad f(0,0)=0 \quad f(3,0)=9$

$L_2: x=3 \ \ 0\le y\le 2 \quad f(3,y)=9-4y \quad f(3,2)=1$

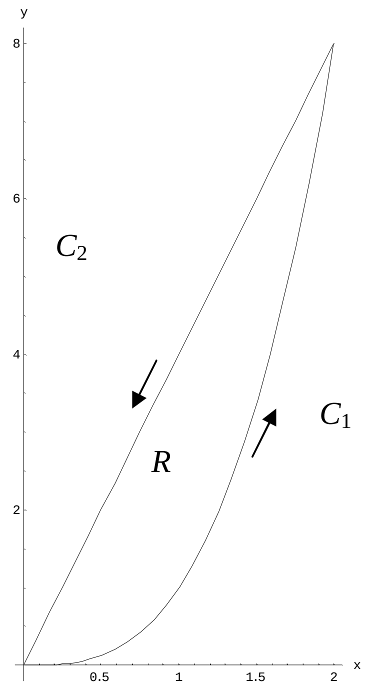
$L_3: y=2 \quad 0 \le x \le 3 \qquad f(x,2) = x^2 - 4x + 4 \qquad f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \qquad f''(x) = 2 > 0 \quad \text{min } en\ (2,2)$

$f(2,2) = 0 \qquad f(0,2) = 4$

$L_4: x = 0 \quad 0 \le y \le 2 \qquad f(0,y) = 2y \qquad f(0,0) = 0$

Máximo absoluto = 9 se alcanza en (3,0)
Mínimo absoluto = 0 se alcanza en (0,0) y en (2,2)

3.- Verificar el Teorema de Green si $\mathbf{F}(x,y) = (xy, x^2)$ y C el camino que va del (0,0) al (2,8) sobre $y = x^3$, y vuelve del (2,8) al (0,0) sobre el segmento de recta que los une.



a) $\displaystyle\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\ dx\ dy$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = x \quad R = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x^3 \le y \le 4x \end{cases} \quad \iint_R = \int_0^2 \int_{x^3}^{4x} x\,dy\ dx = \int_0^2 (4x^2 - x^4)\,dx = \frac{64}{15}$$

b) $\displaystyle\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$

$C_1: y = x^3,\ 0 \le x \le 2 \qquad r(t) = (t, t^3)\ \ 0 \le t \le 2 \qquad r'(t) = (1, 3t^2) \qquad \mathbf{F}(r(t)) = (t^4, t^2) \quad \mathbf{F}.r' = 4t^4$

$$\int_{C_1} = \int_0^2 4t^4 dt = \frac{128}{5}$$

$C_2: r(t) = (2,8)(1-t) + (0,0)t = (2(1-t), 8(1-t)) \ \ 0 \le t \le 1 \quad r'(t) = (-2,-8) \qquad \mathbf{F}(r(t)) = (16(1-t)^2, 4(1-t)^2)$

$\mathbf{F}.r' = -64(1-t)^2 \qquad \displaystyle\int_{C_2} = \int_0^1 -64(1-t)^2\,dt = -\frac{64}{3}$

$$\oint_{\mathbf{C}} \mathbf{F}\,d\mathbf{r} = \frac{128}{5} - \frac{64}{3} = \frac{64}{15}$$

4.- Sea S_1 la superficie dada por $x^2-2x+2y^2-z^2=0$ y S_2: $r(u,v)=\left(2\cos u \operatorname{sen} v, 2\operatorname{sen} u\ \operatorname{sen} v, \sqrt{2}\cos v\right)$ con $0<u<2\pi$, $0<v<\pi$, otra superficie parametrizada. Probar que se intersecan ortogonalmente en $P=(1,1,1)$.

Normal a S_1: $\nabla f=(2x-2,4y,-2z)_{(1,1,1)}=(0,4,-2)$

Normal a S_2:

$T_u=(-2sen\,u sen\,v, 2\,sen\,v\cos u,0)$ $\quad T_v=(2\cos u\cos v, 2\cos v\, sen\,u,-\sqrt{2}\ sen\,v)$

$N=T_u\times T_v=(-2\sqrt{2}\ sen^2 v\cos u,-2\sqrt{2}\ sen\,u\ \ sen^2 v,-4\cos v\, sen\,v)$

$$\begin{cases} 2\cos u\, sen\,v=1 \\ 2\, sen\,v\, sen\,u=1 \\ \sqrt{2}\cos v=1\rightarrow v=\dfrac{\pi}{4}\rightarrow u=\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$N\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)=(-1,-1,-2)$

$\nabla f_{(1,1,1)}.N_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}=0$

Por lo tanto son ortogonales.