SEGUNDO RECUPERATORIO de ANÁLISIS MATEMATICO II – 12/7/2011

1.- Sean las funciones diferenciables $g:\Re^2 \to \Re^3$ y $f:\Re^3 \to \Re^2$ dadas por: $g(x,y)=\left(3\ x^2\ y^2,\ 7\,y,\ x\ y^3\right)$; $f(x,y,z)=\left(\ x^2-\frac{1}{4}y^2+z^2, 8\,x\,y\,z)\right)$.Calcular $J\left(f\circ g\right)(1,1)$ utilizando la regla de la cadena.

2.- Hallar el flujo del campo vectorial el campo $\mathbf{F}:\mathrm{R}^3\to\mathrm{R}^3/\ \mathbf{F}(x,y,z)=\left(2y+\frac{1}{2}, 3z-1, x+5\right)$ siendo S la superficie del paraboloide: $z=4-x^2-y^2$; con $z\geq 0$.

3,- Probar, usando la definición que: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} \dfrac{x-y}{x+y}=-\dfrac{1}{3}$

4.- Calcular el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2\ ,\ y^2+\frac{3}{4}y\ , z+\frac{2}{5}\right)$ al trasladar una partícula sobre el segmento de recta que una los puntos A = (1,2,-1) y B = (-5,4,-3);

SOLUCIONES Y/O SUGERENCIAS -- PRE-FINAL -- 12/7/11

1- $\underbrace{J(fog)(1,1)}_{2x2}=\underbrace{J(f(g(1,1)))}_{2x3}.\ \underbrace{J(g(1,1))}_{3x2}$

$$J(fog)\ (x,y) = \begin{pmatrix} 2x & -\frac{1}{2}y & 2z \\ 8yz & 8xz & 8xy \end{pmatrix}_{(3,7,1)} . \begin{pmatrix} 6xy^2 & 6x^2y \\ 0 & 7 \\ y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix}_{(1,1)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -\frac{7}{2} & 2 \\ 56 & 24 & 168 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 & \frac{35}{2} \\ 504 & 1008 \end{pmatrix}$$

2- La superficie del paraboloide $z=4-x^2-y^2$ con $z\geq 0$ puede parametrizarse

$$\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\ sent \\ z=4-r^2 \end{cases} \quad \to u(r,t)=(r\cos t, rsent, 4-r^2) \qquad \begin{cases} 0\leq t\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 2 \end{cases}$$

$$T_r=\frac{\partial u}{\partial r}=\left(\cos t,\ \ sent,\ \ -2r\right)$$

$$T_t=\frac{\partial u}{\partial t}=\left(-r\,sent, r\cos t,\ 0\ \right) \qquad \to N=T_r\times T_t=\left(2r^2\cos t,\ 2r^2 sent, r\right)$$

$$F(u(r,t))=(2r\,sent+\frac{1}{2},\ 3(4-r^2)-1,\ r\cos t+5)$$

$$F(u(r,t)).N(r,t)=\left(4r^3\cos t.sent+r^2\cos t+24r^2 sent-6r^4 sent+r^2\cos t+5r\right)$$

$$\iint\limits_S F(x,y,z)\ ds=\int_0^2\int_0^{2\pi} F(u(r,t)).N(r,t)\ dt\,dr=20\pi$$

3- Dado $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 /$ $0<|x-2| < \delta$ $\wedge$ $0 < |y-4| < \delta \to \left|\frac{x-y}{x+y} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| < \varepsilon$

$$\left|\frac{x-y}{x+y} - \left(-\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{3x-3y+x+y}{3(x+y)}\right| = \left|\frac{4x-2y}{3(x+y)}\right| = \left|\frac{4(x-2)+8-2(y-4)-8}{3(x+y)}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{4(x-2)}{3(x+y)}\right| + \left|\frac{2(y-4)}{3(x+y)}\right| \leq (1)$$

Para acotar el denominador sea $\delta = 1$ entonces;

$$-1 < x-2 < 1 \qquad\qquad -1 < y-4 < 1$$
$$-1+2 < x < 1+2 \qquad\qquad -1+4 < y < 1+4$$
$$1 < x < 3 \qquad\qquad 3 < y < 5$$

$$4 < x+y < 8 \quad \to \quad \frac{1}{8} < \frac{1}{x+y} < \frac{1}{4}$$

De (1).. $\leq \frac{1}{3}|x-2| + \frac{1}{6}|y-4| < \frac{1}{3}\delta + \frac{1}{6}\delta = \frac{1}{2}\delta = \varepsilon \to$ dado $\varepsilon > 0$ elijo $\delta = mín\{1,\ 2\varepsilon\}$

4- $\int_c F[r(t)].\, r'(t)dt = f(B) - f(A)$ pues el *rotor* $F(x,y,z) = \vec{0}$

debemos hallar la función potencial *f(x,y,z)* tal que $\nabla f(x,y,z) = F(x,y,z)$

$$F_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 \Rightarrow f(x,y,z) = \int 3x^2 dx + g(y,z) \Rightarrow f(x,y,z) = x^3 + g(y,z)$$

$$F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = y^2 + \frac{3}{4}y \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = y^2 + \frac{3}{4}y \Rightarrow g(y,z) = \frac{y^3}{3} + \frac{3}{8}y^2 + h(z)$$

$$F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} = z + \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\left(x^3 + \frac{y^3}{3} + \frac{3}{8}y^2 + h(z)\right) = z + \frac{2}{5} \Rightarrow h'(z) = z + \frac{2}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{2}{5}z + C$$

$f(x,y,z) = x^3 + \frac{y^3}{3} + \frac{3}{8}y^2 + \frac{z^2}{2} + \frac{2}{5}z + C$ es la función potencial, luego la integral pedida es el resultado de la resta: $f(-5,4,-3) - f(1,2,-1)$