Soluciones RECUPERATORIO DE ANALSIS MATEMÁTICO II- TEMA 1

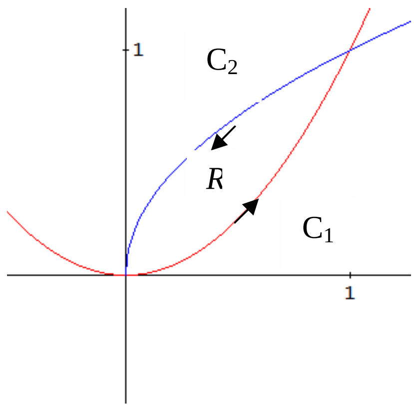
1.- Verificar el teorema de Green, siendo $\mathbf{F}(x,y)=\left(y^2, x\,y\right)$, y R la región común a $y\geq x^2$; $y^2\leq x$.

2.- Calcular el volumen del sólido que está por debajo del paraboloide $z=x^2+y^2$, encima del plano *xy* y dentro del cilindro $(x-1)^2+y^2=1$.

3.- Hallar los máximos y mínimos absolutos de $f(x,y)=x^2+y^2-x\,y+x+y$, en la región común a: $x\leq 0;\, y\leq 0;\;\; x+y\geq -3$.

4.- Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-x\,y^3}{x^2+y^2} & si\;\;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\;\;(x,y)=(0,0)\end{cases}$, analizar la diferenciabilidad de *f* en $P=(0,0)$.

1.-

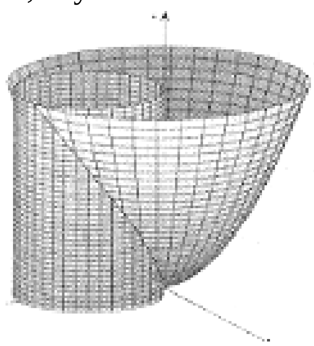


$$\iint_R\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dA=\int_0^1\left[\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(y-2y)\,dy\right]dx=-\frac{3}{20}$$

$$\oint P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\oint F[r(t)]\,.\,r'(t)dt=\int_{C_1}F[r_1(t)].r_1'(t)dt+\int_{C_2}F[r_2(t)].r_2'(t)dt=$$

$$\int_0^1\left(t^4,t^3\right).(1,2t)dt+\int_1^0\left(t^2,t^3\right).(2t,1)dt=\int_0^1 3t^4dt+\int_1^0 3t^3dt=\frac{3}{5}-\frac{3}{4}=-\frac{3}{20}$$

2.- El sólido está por encima del disco *R*, cuya frontera tiene de ecuación $(x-1)^2+y^2=1$



En coordenadas polares tenemos: $x-1=r.\cos t$ $\quad y=r.sent$ $\quad |J|=r$

$R=\{(r,t)/\,0<r<1,\;\; 0<t<2\pi\}$ y el paraboloide en las coordenadas polares indicadas resulta $x^2+y^2=(r\cos t+1)^2+(r.\,sent)^2=r^2+2r\cos t+1$, por lo que $0<z<r^2+2r\cos t+1$

$$\text{V}=\iiint_v r\,dz\;dr\;dt=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1\left(\int_0^{r^2+2r\cos t+1} r\;\;dz\right)dr\right]dt=\frac{3}{2}\pi$$

3.- Como $f(x,y) = x^2 + y^2 - x.y + x + y$ es un polinomio, es continuo sobre el triángulo cerrado y acotado $R = \{x \le 0,\ y \le 0,\ x + y \ge -3\}$, por lo tanto existe máximo absoluto y mínimo absoluto en algunos puntos $(x,y) \in R$.

Primero determinamos los puntos críticos :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-y) + (x-y) = 0 \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y \\ 2y - y = -1 \end{cases} \Rightarrow x = y = -1 \Rightarrow (-1,-1)$$

y como (-1,-1) $\in R$ seguimos el análisis. $f(-1,-1) = -1$ y H=$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3 > 0$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 2 > 0$ la función tiene un mínimo local o relativo en el punto (-1, -1, -1).

Veamos los lados del triangulo

$x = 0$

$$f(0,y) = y^2 + y \Rightarrow f'(0,y) = 2y + 1 \Rightarrow 2y + 1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2} \Rightarrow P = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$$

$$f''(0,y) = 2 \Rightarrow \text{min local en } P_2 = \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

$y = 0$

$f(x,0) = x^2 + x$ es análogo al anterior y se llega a min local en $P_3 = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, -\dfrac{1}{4}\right)$

$y = -x - 3$

$$f(x,-x-3) = 3x^2 + 9x + 6 \Rightarrow f' = 6x + 9;\ 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2},\ y = -\frac{3}{2}$$

$$f'' = 6 > 0 \Rightarrow \text{min local en } P_4 = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

Finalmente evaluamos los vértices del triángulo

$f(0,0) = 0;\ f(-3.0) = 6;\ f(0,-3) = 6$

Máximo absoluto = 6 y se alcanza en (-3, 0) y en (0, -3)

Mínimo absoluto = -1 y se alcanza en (-1, -1)

4.- Para ver si *f* es diferenciable en (0,0) debemos analizar el $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}$

$$f(0+h, 0+k) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k + r(h,k)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Análogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Entonces $r(h,k) = \dfrac{h^3 k - h k^3}{h^2 + k^2}$ y debemos analizar el $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\dfrac{h^3 k - h k^3}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$

Tanto los iterados, como por los caminos $h = m\,k$ dan como resultado que ese limite vale cero.

Debemos probarlo por definición

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 /\ 0 < |x| < \delta \text{ y } 0 < |y| < \delta \Rightarrow \left| \frac{\frac{h^3k - hk^3}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{\frac{h^3k - hk^3}{h^2 + k^2}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| = \left| \frac{h^3k - hk^3}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \right| \leq \left| \frac{h^3k}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \right| + \left| \frac{hk^3}{(h^2 + k^2)\sqrt{h^2 + k^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{h^2}{(h^2 + k^2)} \right| \left| \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| |h| + \left| \frac{k^2}{(h^2 + k^2)} \right| \left| \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \right| |k| \leq 1.1.|h| + 1.1.|k| < \delta + \delta = 2\delta$$

Por lo tanto:

dado $\varepsilon > 0$ basta elegir $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ para probar que el límite vale cero, entonces *f* es diferenciable en (0,0)