PARCIAL ANÁLISIS II - 9/6/2011 **Tema 1**

1-Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y)=5x^2y^3$ en el punto P = (1,1) y en la dirección del vector tangente a la circunferencia $x^2+y^2=2$ en P.

2-Calcular la integral $\iint_R (4x+3y)\,dxdy$ donde R es la región común a $x\geq 0;\, y\geq 0;\; x^2+y^2\geq 1$, y $x^2+y^2\leq 4$.

3-Determinar (si existen) los extremos locales y puntos de silla de la función:

$$f(x,y)=\left(x-x^2\right)\left(\frac{1}{2}y-y^2\right)$$

4- Resolver la integral de línea $\int_C \left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)ds$, siendo C la primera vuelta de la hélice cónica $x=t\cos t$, $y=t\,\mathrm{sen}\,t$, $z=t$.

Soluciones del PARCIAL DE ANALSIS MATEMÁTICO II- TEMA 1

1-Se quiere calcular la derivada de la función diferenciable $f: R^2\to R$, $f(x,y)=5x^2y^3$ en el punto P = (1,1) en la dirección del vector tangente al círculo $x^2+y^2=2$ en P.

Según la fórmula de la derivada direccional $\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(P)=\nabla f(P).\breve{v}}$, necesitamos calcular el gradiente de f y evaluarlo en P

$$\frac{\partial f}{\partial x}=10xy^3,\quad \frac{\partial f}{\partial x}(P)=10 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=15x^2y^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}(P)=15 \quad\to\quad \nabla f(P)=(10,15)$$

Para hallar el vector unitario tangente al círculo, primero calculamos el gradiente a la circunferencia $g(x,y)=x^2+y^2-2=0$ en (1,1) (que es un vector **normal** a la misma)

$\nabla g(1,1)=(2,2)$, el vector tangente buscado debe ser perpendicular al $\nabla g(1,1)$.

Un vector perpendicular al (2,2) es un vector (x,y) tal que el producto escalar de ambos sea cero, $(2,2).(x,y)=2x+2y=0\to y=-x$ entonces hay dos posibles vectores unitarios *v*: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ o $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ y por lo tanto hay dos posibles respuestas:

$\frac{\partial f}{\partial v}(P)=(10,15).\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=5\sqrt{2}-\frac{15}{2}\sqrt{2}=-\frac{5}{2}\sqrt{2}$
$\frac{\partial f}{\partial v}(P)=(10,15).\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-5\sqrt{2}+\frac{15}{2}\sqrt{2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

2- Para resolver la integral $\iint_R (4x+3y)\,dxdy$ siendo $R=\left\{x\geq 0,\ y\geq 0,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$

usamos coordenadas polares: $x=r\cos t$, $y=r\,sent$, el módulo del jacobiano: $|J|=r$

$$T=\begin{cases}1\leq r\leq 2\\ 0\leq t\leq \frac{\pi}{2}\end{cases}\quad \text{y} \qquad f(r,t)=4r\cos t+3r\,sent$$

$$\iint_R (4x+3y)\ dxdy = \iint_T f(r,t).|J|\ drdt = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^2 (4r\cos t + 3rsent)\ r\,drdt = \frac{49}{3}$$

3-Para hallar los puntos críticos debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = (1-2x).\left(\dfrac{1}{2}y - y^2\right) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \left(\dfrac{1}{2} - 2y\right).(x - x^2) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \quad ó \quad y = 0 \quad ó \quad y = \dfrac{1}{2} \\ \text{remplazando en la segunda ecuación} \\ \text{cada valor resulta} \\ \text{si } \ x = \dfrac{1}{2} \quad y = \dfrac{1}{4}; \\ si\ \ y = 0 \quad x = 0 \quad ó \quad x = 1; \\ si\ y = \dfrac{1}{2} \quad x = 0 \ \ ó \ \ x = 1 \end{cases}$$

Resultan así cinco puntos críticos $P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $P_2 = (0,0)$, $P_3 = (1,0)$, $P_4 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $P_5 = \left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Analizamos la matriz hessiana para cada punto:

$H(P_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{16} > 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ la función tiene un **máximo local** en P_1.

$H(P_2) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$ la función tiene un punto de ensilladura en P_2

$H(P_3) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$ la función tiene un punto de ensilladura en P_3

$H(P_4) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$ la función tiene un punto de ensilladura en P_4

$H(P_5) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} < 0$ la función tiene un punto de ensilladura en P_5

4- Para calcular la integral de línea $\int_C \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) ds = \int_a^b f[r(t)]\ \| r'(t) \|\, dt$ la parametrización de la hélice cónica es:

$$r(t) = (t\cos t, t\,\text{sen}\, t, t) \qquad \rightarrow \qquad r'(t) = (\cos t - t\,\text{sen}\, t,\ \text{sen}\, t + t\cos t, 1)$$

$$\| r'(t) \| = \sqrt{(\cos t - t \operatorname{sen} t)^2 + (\operatorname{sen} t + t \cos t)^2 + 1} = \sqrt{2 + t^2}$$

$$f[r(t)] = 2t - t = t \qquad \text{y} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} t.\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{2^{3/2}}{3}\left[\left(1+2\pi^2\right)^{3/2} - 1\right]$$