ANÁLISIS MATEMÁTICO II – RECUPERATORIO DEL PARCIAL 2015 RESUELTO - **TEMA 2**

1.- Considerar la función $F(x,y)=x^2+y^2-10x-4y+4$. a) Demostrar que la función define implícitamente una función de la forma $y=f(x)$ alrededor de los puntos $P_1=(2,6)$ y $P_2=(8,6)$. b) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la función implícita en dichos puntos? c) ¿Cómo es la concavidad de f alrededor de ellos? d) Hacer un bosquejo de la gráfica de f en una vecindad de P_1 y de P_2.

2.- Sea $z=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{y}{x+y}\right)$ a) Determinar la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $\left(1,1,\dfrac{\pi}{6}\right)$. b) Hallar el ángulo que forma dicho plano con la recta dada en forma paramétrica: $x=3+t\,;\,y=2+t\,;\,z=-t$

3.- Verificar el teorema de Green siendo $\mathbf{F}(x,y)=\left(y^2,x^2\right)$ en la región común a $y\geq x^2$; $x+y\leq 2$.

4.- Usar una integral triple para calcular el volumen encerrado por el cilindro $y^2+z^2=4$ y los planos $x=0\,;\,x=z+6$.

RESOLUCIÓN

1.-

a) F tiene derivadas parciales continuas por ser polinómica.

$F(2,6)=0 \quad F(8,6)=0$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=2y-4 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(2,6)=8\neq 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(8,6)=8\neq 0$$

por tanto se cumplen las hipótesis del teorema de la función implícita.

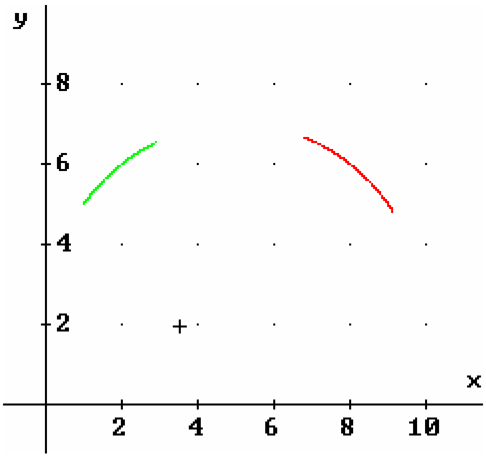
b)

$$y'=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{2x-10}{2y-4} \qquad y'(2,6)=\frac{3}{4}>0 \therefore f\ \textit{creciente} \qquad y'(8,6)=-\frac{3}{4}<0 \therefore f\ \textit{decreciente}$$

c)

$$y''=-\frac{2(2y-4)-(2x-10)\,2y'}{(2y-4)^2} \qquad y''(2,6)<0 \therefore f\ \textit{concava hacia abajo} \qquad y''(8,6)<0 \quad \textit{idem}$$

d)



2.-

$$f(x,y,z)=\textit{arcsen}\left(\frac{y}{x+y}\right)-z$$

a)

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y}{(x+y)^2\sqrt{1-\left(\frac{y}{x+y}\right)^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-\frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x+y)-y}{(x+y)^2\sqrt{1-\left(\frac{y}{x+y}\right)^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{1}{2\sqrt{3}} \qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-1$$

$$\nabla f(1,1)=\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},-1\right)$$

Ec. del plano tangente

$$\nabla f(1,1).\left(x-1,y-1,z-\frac{\pi}{6}\right)=0\to\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}},\frac{1}{2\sqrt{3}},-1\right).\left(x-1,y-1,z-\frac{\pi}{6}\right)=0\to-\frac{1}{2\sqrt{3}}x+\frac{1}{2\sqrt{3}}y+\frac{\pi}{6}=z$$

b)

El vector director de la recta es $\mathbf{v}=(1,1,-1)\to\|\mathbf{v}\|=\sqrt{3}$

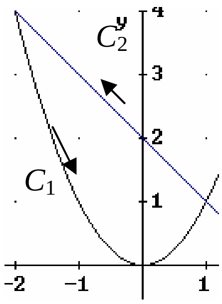
Calculamos el ángulo entre este vector y el vector normal al plano (que es el gradiente), luego el ángulo entre la recta y el plano será el complemento.

$$\cos\alpha=\frac{\nabla f(1,1).\mathbf{v}}{\|\nabla f(1,1)\|\,\|\mathbf{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{\frac{7}{6}}\sqrt{3}}\to\alpha\approx 57^\circ\ 41'\to 90^\circ-\alpha=32^\circ\ 18'$$

3.-

a)

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2(x-y) \qquad R:\begin{cases}-2\le x\le 1\\ x^2\le y\le 2-x\end{cases}$$



$$\iint_R \quad =\int_{-2}^{1}\left[\int_{x^2}^{2-x}2(x-y)\,dy\right]dx=-\frac{189}{10}$$

b)

$$C_1: r_1(t)=\left(t,t^2\right) \quad -2\le t\le 1\to r_1'(t)=(1,2t) \qquad F[r_1(t)]=\left(t^4,t^2\right) \quad F.r_1'=t^4+2t^3$$

$$\int_{C_1} \quad =\int_{-2}^{1}\left(t^4+2t^3\right)dt \quad =-\frac{9}{10}$$

$$C_2: r_2(t)=(1,1)(1-t)+(-2,4)\,t=(1-3t,1+3t);\ 0\le t\le 1\to r_2'=(-3,-3) \qquad F[r_2(t)]=\left((1+3t)^2,(1-3t)^2\right)$$

$$F.r_2'=-36t$$

$$\int_{C_2} \quad =\int_{0}^{1}-36t\,dt \quad =-18$$

$$\oint_C \quad =-\frac{9}{10}-18=-\frac{189}{10}$$

4.-

Usamos coordenadas cilíndricas

$$z=r\cos t;\ y=r\,sen\,t;\ x=x \qquad 0\le r\le 2\ ;\ 0\le t\le 2\pi\ ;\ 0\le x\le r\cos t+6 \qquad |J|=r$$

$$V=\int_0^2\left[\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{r\cos t+6} r\,dx\right)dt\right]dr=24\pi$$