ANÁLISIS MATEMÁTICO II - 8 de junio de 2017

1. Analizar la diferenciabilidad en el origen de

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)sen\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Dem: Para analizar si la función es diferenciable, debemos investigar el siguiente límite:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{||(h,k)||}$$

donde

$$r(h,k) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k.$$

Notemos que $f(0,0) = 0$ y que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} h^2 sen\frac{1}{\sqrt{h^2}} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} k^2 sen\frac{1}{\sqrt{k^2}} = 0$$

lo que resulta ser que

$$r(h,k) = (h^2+k^2)sen\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Volviendo al límite inicial, nos queda que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{||(h,k)||} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} sen\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}.$$

Si hacemos los límites iterados y por diferentes caminos que pasan por el punto $(0,0)$, tenemos que dicho límite da 0. Probemos entonces por definición que este límite efectivamente es 0.

Dado $\epsilon > 0$. Sean $0 < |h| < \delta$ y $0 < |k| < \delta$, entonces:

$$|\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}} sen\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}| = |\sqrt{h^2+k^2}||sen\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}| < |\sqrt{h^2+k^2}| < 2\delta$$

lo que implica que basta con tomar $\epsilon = 2\delta$, es decir, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. Entonces el límite da 0 y la función es diferenciable en el $(0,0)$.

2. Hallar los puntos del plano más cercanos y más lejanos del origen a la curva $(x-2)^2+(y-2)^2 = 2$. Interpretar gráficamente el enunciado y la respuesta.

Dem: El problema se resuelve utilizando Multiplicadores de Lagrange. Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + y^2$. Tomamos la función $f(x, y)$ en vez de $d = \sqrt{x^2 + y^2}$, pues los extremos de $f(x, y)$ son los mismos que los extremos de d, donde d mide la distancia de cualquier punto del plano $\mathbb{R}^2$ al origen. Sea

$$g(x, y) = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 2$$

y la función

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda((x-2)^2 + (y-2)^2 - 2).$$

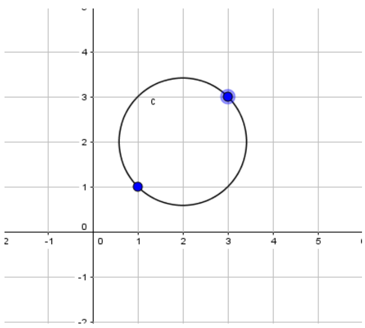
Busquemos los extremos de L:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + 2\lambda(x-2) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + 2\lambda(y-2) = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (x-2)^2 + (y-2)^2 - 2 = 0.$$

De las primeras dos ecuaciones tenemos que $x = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$ e $y = \frac{2\lambda}{1+\lambda}$, lo que implica que $x = y$. Reemplazando esta igualdad en la tercera ecuación, tenemos que $(x-2)^2 + (x-2)^2 = 2(x-2)^2 = 2$, es decir, $(x-2)^2 = 1$. Luego, tenemos que $x = 3$ y $x = 1$. Resulta sencillo comprobar a partir de la matriz hessiana que los puntos $P_1 = (1, 1)$ y $P_2 = (3, 3)$ son los extremos buscados, donde P_1 es el punto más cercano y el punto P_2 es el punto más lejano. El siguiente gráfico interpreta geométricamente el problema y los puntos extremos:

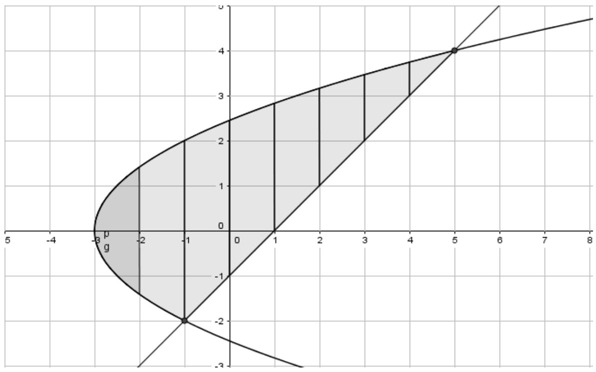


3. Dada la región R acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

   a) Dibujar dicha región R y hallar los puntos de intersección entre ambas curvas.

b) Calcular $A(R)$.

Dem: La siguiente gráfica ilustra la región acotada R:



Reemplazando $x = y + 1$ en la ecuación $y^2 - 2x - 6 = 0$ se tiene que

$$y^2 - 2(y+1) - 6 = y^2 - 2y - 8 = 0$$

lo cual tenemos dos soluciones: $y = -2$ e $y = 4$. Así, los puntos donde se cortan las curvas son $P_1 = (-1, -2)$ y $P_2 = (5, 4)$. Luego, la región R esta dada por

$$R = \begin{cases} -2 \leq y \leq 4 \\ \dfrac{y^2 - 6}{2} \leq x \leq y + 1 \end{cases}$$

Calculemos el área de la región sombreada.

$$A(R) = \int_{-2}^{4} \int_{y^2-6/2}^{y+1} dxdy = \int_{-2}^{4} (y + 1 - \frac{1}{2}(y^2 - 6))dy = 18$$

4. Determinar que $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{2z})$ es un campo vectorial conservativo y hallar la función potencial correspondiente.

   Dem: Tenemos que

$$\text{rot}\mathbf{F} = (\frac{\partial 3ye^{3z}}{\partial y} - \frac{\partial 2xy + e^{3z}}{\partial z}, -\frac{\partial 3ye^{3z}}{\partial x} + \frac{\partial y^2}{\partial z}, \frac{\partial 2xy + e^{3z}}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{\partial z}) = (0, 0, 0)$$

   lo que implica que $\mathbf{F}$ es un campo conservativo. Busquemos la función potencial, es decir, una función f tal que cumple que $\nabla f = \mathbf{F}$. Luego,

$$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (y^2, 2xy + e^{3z}, 3ye^{2z}).$$

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x} = y^2$ entonces $f(x, y, z) = xy^2 + g(y, z)$. Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx + \frac{\partial g(y, z)}{\partial y} = 2xy + e^{3z},$$

es decir, $\dfrac{\partial g(y, z)}{\partial y} = e^{3z}$. Entonces $g(y, z) = ye^{3z} + h(z)$ y tenemos que

$$f(x, y, z) = y^2 x + ye^{3z} + h(z)$$

Por último, de la tercera coordenada, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3ye^{3z} + h(z) = 3ye^{3z},$$

lo que implica que $h'(z) = 0$, es decir, $h(z) = c$, c es una constante. Concluimos que

$$f(x, y, z) = xy^2 + ye^{3z} + c$$