MÓDULO 3

- **DERIVADAS DIRECCIONALES**
- **DERIVADAS PARCIALES**
- **DIFERENCIAL**
- **GRADIENTE**

Derivadas direccionales

A la derivada de una función de una variable la definíamos de la siguiente manera:

Sea $f:(a,b)\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x_0 \in (a,b)$, *f* es derivable en x_0 si existe el límite

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Y este es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función *f* en el punto (x_0, y_0).

Por tanto la ecuación de dicha recta tangente es:

$$y-y_0 = f'(x_0)\left(x-x_0\right)$$

Pretendemos ahora, extender este concepto al caso de una función de más variables, en particular lo haremos para **dos variables**.

La idea es tener una función de dos variables, cuya gráfica es una superficie en $\mathbb{R}^3$. Un punto (x_0, y_0) en el plano $z=0$, es decir el plano *xy*, y un vector unitario $\mathbf{u}=(a,b)$ en dicho plano.

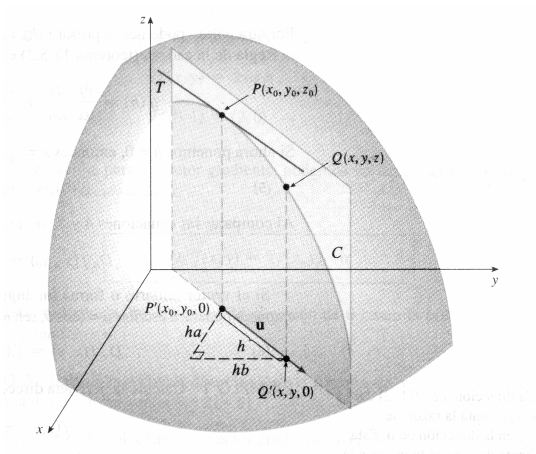
El vector $\mathbf{u}=(a,b)$ nos dará la dirección en la que vamos a calcular la derivada direccional.

A esta derivada direccional queremos calcularla además en el punto (x_0, y_0).

Para esto, geométricamente, tomaremos un plano perpendicular al plano $z=0$, con la dirección del vector **u** y que pase por el punto $(x_0, y_0, 0)$. (Ver figura).

Este plano, cortará a la gráfica de *f* en una curva *C*.

La derivada direccional, si existe, nos dará la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *C* en el punto (x_0, y_0, z_0).



Demos ahora la definición formal.

Definición

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, D$ abierto, $(x_0, y_0) \in D, \mathbf{u} = (a,b)$ un vector unitario, $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Definimos a la derivada direccional de la función *f* en (x_0, y_0), en la dirección de $\mathbf{u} = (a,b)$ y la denotamos por $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0)$, al límite:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h\,a, y_0 + h\,b) - f(x_0, y_0)}{h}$$

si tal límite existe.

3.1.-

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = x^2 + y^2$, calcular la derivada direccional de *f* en un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Evaluar la derivada obtenida para $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$.

3.2.-

Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y,z) = 2\,x^3 + 7\,y^2 + 9\,z^2$ y sea $\mathbf{v} = (a, b, c)$ un vector unitario dado en el espacio $\mathbb{R}^3$. Calcular la derivada direccional de esta función en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ en la dirección de **v**.

3.3.-

Hallar la derivada direccional de la función:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$ en $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Si la derivada direccional fuera una buena extensión de la derivada unidimensional, debería conservar todas sus propiedades, entre ellas que la derivabilidad implique la continuidad de la función.

El siguiente ejercicio da cuenta de que esto no ocurre.

3.4.-

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Sea $\mathbf{u} = (a, b)$ un vector unitario dado.

a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$.

b) Analizar la continuidad de *f* en $(0,0)$.

Más adelante veremos la **diferencial** que es una buena extensión de la derivada de una variable.

Derivadas parciales

Un caso particular de la derivada direccional se da cuando tomamos dos direcciones particulares, las paralelas a los ejes *x* e *y* respectivamente. Esto nos rinde dos derivadas particulares a las que llamaremos **derivadas parciales**.

La primera de ellas es la derivada parcial respecto de *x*, que resulta de tomar al vector unitario **u** como $\mathbf{u}=(1,0)$, lo que al ponerlo en la definición anterior resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h.1,y_0+h.0)-f(x_0,y_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

A esta derivada parcial respecto de *x* en el punto (x_0,y_0) la simbolizamos $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ y nos queda:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

Análogamente si tomamos $\mathbf{u}=(0,1)$ obtenemos la derivada parcial de *f* respecto de *y*.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$$

Si la función tiene derivadas parciales en cada punto de un conjunto *D* abierto de $\mathbb{R}^2$, podemos obtener las **funciones derivadas parciales**.

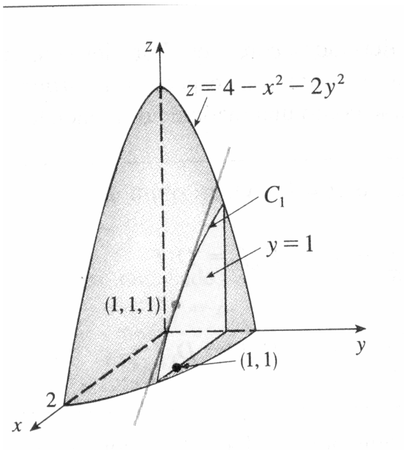
REGLA PARA CALCULAR LAS DERIVADAS PARCIALES DE $z=f(x,y)$

1. Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, consideramos a *y* como una constante y derivamos a *f* como si sólo dependiera de *x*.
2. Para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, consideramos a *x* como una constante y derivamos a *f* como si sólo dependiera de *y*.

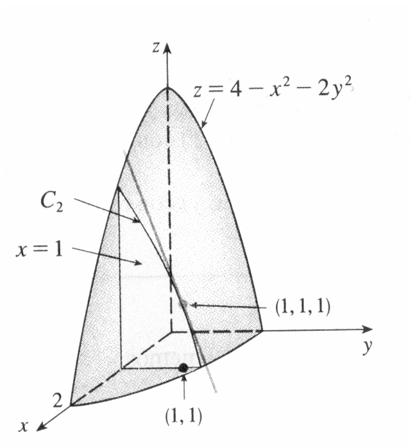
Ejemplo

Si $f(x,y)=4-x^2-2y^2$, calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ e interpretar esos números como pendientes.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-2x \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=-2$$



$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-4$$



En el caso de funciones de mayor número de variables, tendremos una derivada parcial por cada una de ellas.

Por ejemplo:

$$f(x,y,z)\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\end{cases}$$

3.5.-

Hallar las derivadas parciales primeras con respecto a x e y , aplicando las reglas de derivación:

$a)\ f(x,y)=2x-3y+5$ $\quad d)\ f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ $\quad g)\ f(x,y)=\text{sen}(3x).\cos(3y)$

$b)\ f(x,y)=x^2e^{2y}$ $\quad e)\ z=\dfrac{x}{y}\ ;\ y\neq 0$ $\quad h)\ g(x,y)=x.e^{y}.\text{sen}(x.y)$

$c)\ f(x,y)=\ln\sqrt{x.y}\ ,\ (xy)>0$ $\quad f)\ z=\dfrac{x.y}{x^2+y^2}\ ;\ (x,y)\neq(0,0)$

3.6.-

La ecuación de Van der Waal para el estado gaseoso es: $\left(P+\dfrac{n^2a}{V^2}\right)(V-nb)=nRT$

Donde P es la presión del gas, V el volumen, T la temperatura (en Kelvin), n el número de moles, R es la constante universal de los gases, a y b son constantes. Calcular e interpretar $\dfrac{\partial P}{\partial V}$; $\dfrac{\partial T}{\partial P}$.

3.7.-

La flexión de una viga de longitud L, ancho w y altura h, viene dada por $S(L,w,h)=c\dfrac{L^4}{wh^3}$, donde c es constante. Demostrar que: $\dfrac{\partial S}{\partial L}=\dfrac{4}{L}S\,;\dfrac{\partial S}{\partial w}=-\dfrac{1}{w}S\ ;\ \dfrac{\partial S}{\partial h}=-\dfrac{3}{h}S$. Usar el resultado para determinar cuál variable tiene el efecto proporcional mayor sobre la flexión.

<u>Derivadas parciales de orden superior</u>

Ya vimos que si la función f tiene derivadas parciales en todo punto de un conjunto abierto, podemos obtener las **funciones** derivadas parciales.

Estas nuevas funciones, dependen de las mismas variables que f, con lo que podemos volver a derivarlas parcialmente, obteniendo las llamadas **derivadas parciales segundas**.

Así, dada $f(x,y)$ podemos calcular **cuatro derivadas parciales segundas** de f.

$$
f(x,y)\begin{cases}
\dfrac{\partial f}{\partial x}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)\end{cases}\\[6ex]
\dfrac{\partial f}{\partial y}\rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)\end{cases}
\end{cases}
$$

Al símbolo $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ lo leemos: “derivada parcial segunda de f respecto de x dos veces”

También $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}$ es la "derivada parcial segunda de f respecto de y respecto de x".

A esta última, junto con $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}$, les daremos el nombre de **derivadas parciales cruzadas**.

3.8.-

Hallar todas las derivadas parciales segundas de:

$a)\ f(x,y)=x^2-2xy+3y^2$ $\quad c)\ z=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ $\quad e)\ f(x,y)=x.e^{-y^2}$

$b)\ f(x,y)=e^x \tan y$ $\quad d)\ z=x\,e^y+y\,e^x$ $\quad f)\ g(x,y)=\operatorname{sen}(x-2y)$

3.9.-

Verificar que $z=\operatorname{sen}(x-c.t)$ y $z=\operatorname{sen}(\omega.c.t).\operatorname{sen}(\omega.x)$ satisfacen, respectivamente, la ecuación de la onda:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=c^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

3.10.-

Verificar que cada función satisface la ecuación del calor: $\dfrac{\partial f}{\partial t}=c^2\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$a)\ f(x,t)=e^{-t}\cos\left(\dfrac{x}{c}\right)$ $\quad b)\ f(x,t)=e^{-t}\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{c}\right)$

3.11.-

Verificar que las funciones dadas satisfacen la ecuación de Laplace: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$

$a)\ f(x,y)=e^x\operatorname{sen} y$ $\quad b)\ f(x,y)=\dfrac{1}{2}\left(e^y-e^{-y}\right)\operatorname{sen} x$ $\quad c)\ f(x,y)=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

Para la mayoría de las funciones con las que vamos a trabajar, las derivadas parciales cruzadas resultarán **iguales**.

Aunque esto no siempre ocurre, en realidad tenemos la siguiente propiedad.

Propiedad: Si las derivadas parciales cruzadas son **funciones continuas** entonces **son iguales**.

3.12.-

Este ejercicio es un contraejemplo de la propiedad anterior. Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0,0)=1$ *y* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(0,0)=-1$.

<u>Diferenciabilidad</u>

La diferencial en una variable:

Sea $f:(a,b)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, f derivable en x_0, esto significa que existe el límite:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si no tomáramos el límite, esas dos expresiones no serían, en general, exactamente iguales, sino aproximadamente iguales.

$$f'(x_0)\approx\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Leftrightarrow f'(x_0)h\approx f(x_0+h)-f(x_0)$$

Para restablecer la igualdad deberíamos sumar una cierta cantidad en alguno de los dos miembros. A esta cantidad la llamaremos **resto o término complementario** y la simbolizaremos por $r(h)$.

Entonces:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)h+r(h) \quad (1)$$

Donde

$$r(h)\overset{def}{=}f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h$$

Si dividimos m. a m. por $h\neq 0$

$$\frac{r(h)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\frac{f'(x_0)h}{h} \Leftrightarrow \frac{r(h)}{h}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$$

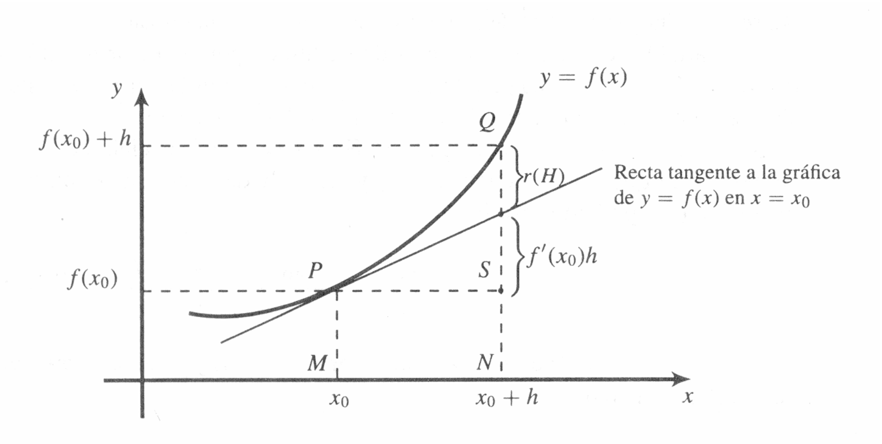
y tomando límite cuando $h\to 0$, nos queda:

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{h}=\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)}-\lim_{h\to 0}f'(x_0)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$$

En la expresión (1), al término $f'(x_0)h$ lo llamamos **la diferencial de *f* en x_0.**

Vemos que es una **transformación lineal** de la variable *h* y la simbolizamos:

$$df(x_0,h)\overset{def}{=}f'(x_0)h$$



Gráficamente la diferencial es una recta que pasa por el origen de coordenadas y tiene la misma pendiente que la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto x_0;

Notación usual

En la notación que dimos antes para la diferencial, estamos destacando el punto y la variable en donde la calculamos. Usualmente, si no hay posibilidades de confusión, la notación es:

$$u = f(x) \to du = f'(x)\,dx$$

Por ejemplo en el método de sustitución para el cálculo de primitivas:

$\int \cos 5x \quad dx$ hacíamos $u = \underbrace{5x}_{f(x)} \to du = \underbrace{5}_{f'(x)} \; dx$

<u>Uso de la diferencial como aproximación lineal al valor de la función en un punto</u>

Si dada una función $f(x)$, cumple con ser diferenciable, conocemos su valor en el punto x_0 y queremos calcular su nuevo valor en otro punto cercano $x_0 + h$, podemos, en lugar de evaluar la función en $x_0 + h$, hacerlo evaluando el valor de la recta tangente (a la gráfica de $f(x)$ en el punto x_0) en $x_0 + h$.

A este procedimiento se lo llama **aproximación lineal**, puesto que en lugar de ir por la gráfica de la verdadera función, vamos por la gráfica de su recta tangente.

El **error** cometido en este cálculo es el que denominamos anteriormente $r(h)$, que será pequeño si el valor de h no es muy grande.

Veamos un ejemplo:

Supongamos tener la función $f(x) = x^2$ y deseamos evaluar $f(3{,}1) = f(\underbrace{3}_{x_0} + \underbrace{0{,}1}_{h})$.

Si usamos la aproximación lineal $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0).h$, tenemos:

$f(x_0) = f(3) = 3^2 = 9$
$f'(x) = 2x \Leftrightarrow f'(x_0) = f'(3) = 2.3 = 6$
$\therefore\ f(3{,}1) \approx f(3) + f'(3).0{,}1 = 9 + 6.0{,}1 = 9{,}6$

Mientras que si hubiéramos calculado el verdadero valor de la función en el punto 3,1; tendríamos que haber hecho $3{,}1^2$ es decir 3,1.3,1=9,61.

El error que cometimos usando la aproximación lineal en vez del verdadero valor de la función es de $9{,}61 - 9{,}6 = 0{,}1 = r(h)$.

Tal vez este ejemplo hace que parezca que usar la aproximación lineal es un tanto inútil ya que la dificultad de calcular $3{,}1^2$ no es muy grande, pero pensemos lo que nos ocurriría si nos pidieran calcular, **SIN CALCULADORA**, el valor de $e^{0,2}$.

Nos resultaría, por lo menos, muy engorroso, pero veamos qué ocurre con la aproximación lineal.

$e^{0.2} = e^{(0+0,2)}$ $\quad x_0 = 0$ y $h = 0{,}2$, con esto tenemos

$f(x_0) = f(0) = e^0 = 1$
$f'(x) = e^x \Leftrightarrow f'(x_0) = e^0 = 1$
$f(0{,}2) \approx 1 + 1.0{,}2 = 1{,}2$

Si usamos la calculadora para ver el "verdadero" valor de $e^{0,2}$, obtenemos: $e^{0,2} = 1{,}2214$ con lo cual el error que cometimos es $r(h) = 1{,}2214 - 1{,}2 = 0{,}0214$.

<u>Extensión a funciones de dos variables</u>

Vamos a plantear la definición de diferenciabilidad dada para funciones de una variable en el caso de funciones de dos variables, usando una expresión similar a (1).

Definición

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, D$ abierto, $(x_0, y_0) \in D$. Se dice que *f* es **diferenciable** en (x_0, y_0) si existen $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ y para todo *h, k* tales que $f(x_0 + h, y_0 + k) \in D$, se tiene que:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,k + r(h,k)$$

donde

$$r(h,k) \overset{def}{=} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,k\right]$$

llamado **resto, término de error o término complementario**, es una expresión que cumple:

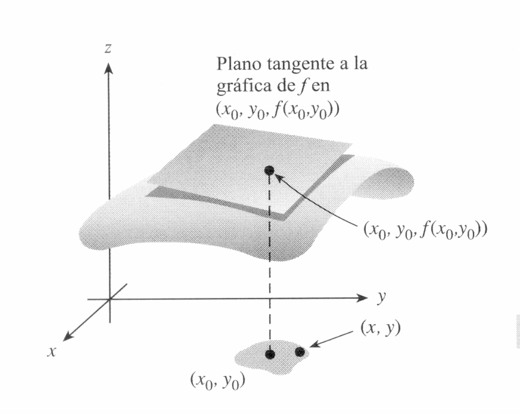
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

La función

$$df(x_0, y_0; h, k) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,k$$

considerada una **expresión lineal** en (h,k), se llama **diferencial de *f* en** (h,k).

La diferencial es la mejor aproximación lineal a la grafica de *f*, en este caso, geométricamente es un plano tangente a la gráfica de *f* en el punto considerado.



Se dice que *f* es **diferenciable en un conjunto abierto *D*** si lo es en cada punto de *D*.

Ejemplos:

Ejemplo 1

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

analizar la diferenciabilidad de *f* en $P = (0,0)$.

Para ver si *f* es diferenciable en (0,0) debemos analizar el $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}$

Usamos la fórmula del resto

$$r(h,k) = f(0+h, 0+k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,k$$

Como el punto considerado es un “salto” en la definición de la función, a las derivadas parciales debemos calcularlas por **definición**.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Análogamente

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$$

Entonces $r(h,k)=\dfrac{h^3k-hk^3}{h^2+k^2}$ y debemos analizar el $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{\dfrac{h^3k-hk^3}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}$

Tanto los límites iterados, como por los caminos $h=m\,k$ dan como resultado que ese limite vale cero.

Debemos probarlo por definición

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0\,/\;|h|<\delta \text{ y } |k|<\delta \text{ y } (h,k)\neq(0,0)\overset{?}{\Rightarrow}\left|\frac{\dfrac{h^3k-hk^3}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}-0\right|<\varepsilon$$

Tendremos que mostrar que dado un $\varepsilon>0$ podemos exhibir un $\delta>0$ que verifica la expresión anterior.

$$\left|\frac{\dfrac{h^3k-hk^3}{h^2+k^2}}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|=\left|\frac{h^3k-hk^3}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq\left|\frac{h^3k}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\right|+\left|\frac{hk^3}{(h^2+k^2)\sqrt{h^2+k^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{h^2}{(h^2+k^2)}\right|\left|\frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}}\right||h|+\left|\frac{k^2}{(h^2+k^2)}\right|\left|\frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right||k|\leq 1.1.|h|+1.1.|k|<\delta+\delta=2\delta$$

Por lo tanto:

dado $\varepsilon>0$ basta elegir $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ para probar que el límite vale cero, entonces *f* es diferenciable en (0,0)

Ejemplo 2

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x.|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & si\,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Probar que *f*(*x*,*y*) no es diferenciable en (0,0)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h.|0|}{|h|}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h|h|} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\frac{0.|k|}{|k|}}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{0}{k} = 0$$

Por otra parte

$$r(h,k) = \frac{h|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\frac{h|k|}{\sqrt{h^2 + k^2}}}{\sqrt{h^2 + k^2}} \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h|k|}{h^2 + k^2} = \lim_{r \to 0} \frac{r \cos t \, |r \operatorname{sen} t|}{r^2} = \cos t \, |\operatorname{sen} t|$$

Este límite no existe pues para cada valor del ángulo t obtenemos un resultado distinto, por lo tanto la función no es diferenciable en (0,0).

Con estos ejemplos vemos que decidir si una función es o no diferenciable tiene ciertas dificultades, sin embargo hay un teorema que nos permitirá hacerlo más fácilmente.
Lo enunciaremos sin demostración.

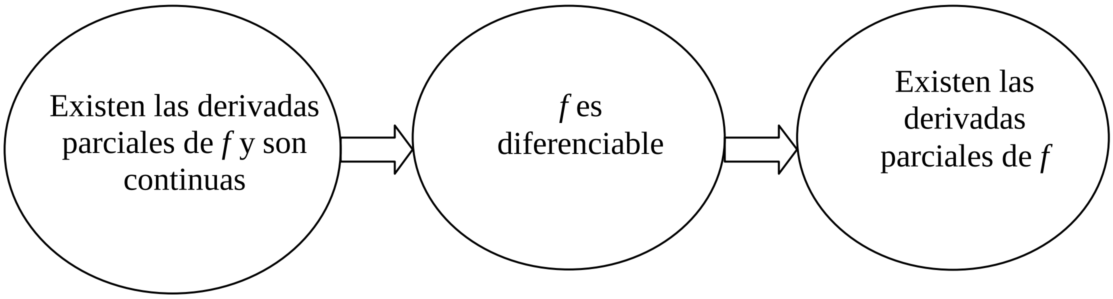
<u>Teorema</u>

Si existen las derivadas parciales de f en todo un entorno U de (x_0, y_0) y son funciones continuas en (x_0, y_0), entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).

Con el resultado de este teorema podemos asegurar la diferenciabilidad de funciones tales como:

$f(x,y) = xy^2 - \cos x \qquad g(x,y) = e^{x+2y}$

En resumen:



Ejemplo:

Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

a) Determinar la continuidad de *f*.

b) Estudiar la continuidad de las derivadas parciales de *f*. De los resultados obtenidos, ¿puede deducirse la diferenciabilidad de *f* en el origen?

a)

$$f(0,0)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta-r^3\operatorname{sen}^3\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0} r\underbrace{\left(\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta-\operatorname{sen}^3\theta\right)}_{f\text{ acotada}}=0$$

De existir el límite valdría cero, probemos por definición:

$$|x|<\delta,|y|<\delta,(y,y)\neq(0,0)\overset{?}{\Rightarrow}\left|\frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$$

$$\left|\frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2}\right|=\underbrace{|y|}_{<\delta}\underbrace{\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|}_{\le 1}+\underbrace{|y|}_{<\delta}\underbrace{\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|}_{\le 1}<2\delta=\varepsilon$$

Dado $\varepsilon>0$ elegimos $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ y con eso demostramos que el límite doble vale cero.

Por tanto *f* es continua en (0,0).

b) Analicemos la continuidad de la derivada parcial con respecto a *x*, en el origen.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{0}{h^2}-0}{h}=0\\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2xy\left(x^2+y^2\right)-\left(yx^2-y^3\right)2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}\end{cases}$$

Entonces podemos escribir:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}\dfrac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2} & si\ \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ y analizar su continuidad en (0,0)’

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{4r^4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta}{r^4}=4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta$$

Este límite no existe por quedar en función de θ, de lo que deducimos que la derivada de *f* respecto de *x* **no es continua** en el origen.

Realizaremos, en forma similar, el estudio de la continuidad de la otra derivada parcial:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{\dfrac{-k^3}{k^2} - 0}{k} = -1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\left(x^2 - 3y^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - \left(yx^2 - y^3\right)2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \dfrac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} \end{cases}$$

Nos queda:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ -1 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Analicemos su continuidad en el origen:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 - y^4 - 4x^2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^4\left(\cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta - 4\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta\right)}{r^4} = \cos^4\theta - \operatorname{sen}^4\theta - 4\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta$$

El límite **no existe**.

Por tanto la derivada parcial de *f* con respecto a *y*, **no es continua** en el origen.

Finalmente, de los resultados obtenidos **no podemos deducir la diferenciabilidad** de $f(x,y)$ en el origen.

3.13.-

Analizar cuáles de las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en el punto dado.

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \text{ en } P = (0,0) \qquad b)\ f(x,y) = xy^2 \text{ en } P = (0,0)$$

$$c)\ f(x,y) = x^2 + y^2 \text{ en } P = (x_0, y_0) \quad d)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad P = (0,0)$$

<u>Unicidad de la diferencial</u>

Toda aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ es de la forma:

$$g(h,k) = ah + bk$$

con $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

Ahora bien, lo mismo que ocurre para funciones de una variable, la diferencial es la mejor aproximación lineal al valor de la función en un punto (x_0+h, y_0+k) próximo a (x_0, y_0). Es decir que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,k$$

es la mejor aproximación lineal al valor de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$, salvo el término del error $r(h,k)$ que cumple: $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

Supongamos ahora que existe **otra** aproximación lineal que también rinde la mejor aproximación lineal al valor de *f*, es decir que suponemos que existen a y b reales, tales que:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) = ah + bk + r(h,k) \quad (1)$$

con $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$

Probaremos que a y b son las derivadas parciales de f respecto de x e y respectivamente, con lo que la diferencial resulta ser única.

Veamos esto:

Si hacemos en (1) $k=0$, obtenemos:

$$f(x_0+h, y_0+0) - f(x_0, y_0) = ah + b\,0 + r(h,0)$$

Dividimos m. a m. por $h \neq 0$ y nos queda

$$\frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = a + \frac{r(h,0)}{h} \quad (2)$$

La idea ahora es tomar límite cuando $h \to 0$, pero primero vamos a demostrar que con la hipótesis de que $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$ entonces vale que $\lim\limits_{h\to 0} \frac{r(h,0)}{h} = 0$

Sea $\varepsilon > 0$. Por la hipótesis existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \sqrt{h^2+k^2} < \delta \Rightarrow \left| \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| < \varepsilon$$

En particular, si $k=0$ y $0 < |h| < \delta \Rightarrow |(h,0)| = \sqrt{h^2+0} < \delta$ y tenemos

$$\left| \frac{r(h,0)}{h} \right| = \frac{|r(h,0)|}{|h|} = \left| \frac{r(h,0)}{|h|} \right| < \varepsilon$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, basta elegir a $\delta > 0$, como el mismo δ cuya existencia nos asegura el $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.

Entonces si $0 < |h| < \delta,$ se tiene que $\left|\frac{r(h,0)}{h}\right| < \varepsilon$ y esto significa, por la definición de límite de una variable, que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h,0)}{h} = 0$$

como queríamos demostrar.

Podemos tomar ahora $\lim\limits_{h \to 0}$ en ambos miembros de (2), para obtener que:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Análogamente se prueba que:

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Con lo que queda completa la demostración de que **la diferencial es única**.

La diferenciabilidad implica la continuidad

Vamos a demostrar ahora que, si *f* es diferenciable, entonces es continua.

Para esto, primero vamos a ver una expresión del resto $r(h,k)$ equivalente a la dada anteriormente, pero más adecuada para la demostración de continuidad.

$$r(h,k) = \frac{h^2 + k^2}{\sqrt{h^2 + k^2}\sqrt{h^2 + k^2}} r(h,k) =$$

$$= h\left(\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \cdot \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right) + k\left(\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \cdot \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}\right) \overset{def}{=} h.\delta_1(h,k) + k.\delta_2(h,k)$$

Si observamos que las expresiones

$\frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ y $\frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ están acotadas entre -1 y 1 y que $\frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$ tiende a cero cuando $(h,k) \to (0,0)$ por la hipótesis de diferenciabilidad, vemos claramente que:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \delta_1(h,k) = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \delta_2(h,k) = 0$$

Esto nos permite enunciar una definición de diferenciabilidad equivalente a la anterior pero con esta nueva forma del resto.

Definición:

f es diferenciable en el punto (x_0, y_0) si el incremento $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ se puede expresar en la forma:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + h.\delta_1(h,k) + k.\delta_2(h,k)$$

donde $\delta_1(h,k)$ y $\delta_2(h,k)$ son funciones que cumplen:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \delta_1(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \delta_2(h,k) = 0$$

Con esto ya podemos encarar la demostración del siguiente:

Teorema

Toda función **diferenciable** en un punto, es **continua** en él.

Demostración

Utilizando la nueva versión de la definición de diferenciabilidad

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k + h.\delta_1(h,k) + k.\delta_2(h,k)$$

y tomando a ambos miembros el límite cuando $(h,k)\to(0,0)$ nos queda:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)\right] = \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)}\ \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} h}_{0} +$$

$$+\underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}\ \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} k}_{0} + \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} h.}_{0}\ \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)}\delta_1(h,k)}_{0} + \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} k}_{0}\ \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} .\delta_2(h,k)}_{0}$$

$$\therefore\ \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[f(\underbrace{x_0+h}_{x},\underbrace{y_0+k}_{y}) - f(x_0,y_0)\right] = 0 \quad \text{con } x_0+h = x\ ;\quad h\to 0 \Leftrightarrow x\to x_0$$

$$y_0+k = y\ ;\ k\to 0 \Leftrightarrow y\to y_0$$

$$\therefore\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\left[f(x,y)-f(x_0,y_0)\right] = 0$$

$$\therefore\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

que es la propia definición de continuidad en (x_0,y_0).

3.14.-

Analizar la diferenciabilidad de la siguiente función en el punto indicado

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad \text{en } P=(0,0)$$

Teorema

Sean $f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $g: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, D abierto, $(x_0,y_0)\in D$, f y g diferenciables en (x_0,y_0), entonces:

a) la suma $f+g: D\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(f+g)(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)+g(x_0,y_0)$, es una función diferenciable en (x_0,y_0).

b) el producto $f.g: D\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(f.g)(x_0,y_0)=f(x_0,y_0).g(x_0,y_0)$ es una función diferenciable en (x_0,y_0).

c) si $g(x_0,y_0)\neq 0$, el cociente $\frac{f}{g}\cdot: D\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\left(\frac{f}{g}\right)(x_0,y_0)=\frac{f(x_0,y_0)}{g(x_0,y_0)}$ es una función diferenciable en (x_0,y_0).

Demostración:

Vamos a demostrar el caso de la suma

a) Debemos demostrar que el resto $r_{(f+g)}(h,k)$, definido por la expresión

$$r_{(f+g)}(h,k)=(f+g)(x_0+h,y_0+k)-(f+g)(x_0,y_0)-\frac{\partial}{\partial x}(f+g)(x_0,y_0)\,h-\frac{\partial}{\partial y}(f+g)(x_0,y_0)\,k$$

cumple con

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r_{(f+g)}(h,k)}{\|(h,k)\|}=0$$

Desarrollando:

$$r_{(f+g)}(h,k)=f(x_0+h,y_0+k)+g(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-g(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h-$$

$$-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\,h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,k-\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\,k=$$

$$=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k+g(x_0+h,y_0+k)-g(x_0,y_0)-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\,h-$$

$$-\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\,k$$

Dividiendo m.a m. por $\|(h,k)\|$

$$\frac{r_{(f+g)}(h,k)}{\|(h,k)\|}=$$

$$=\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k}{\|(h,k)\|}+$$

$$+\frac{g(x_0+h,y_0+k)-g(x_0,y_0)-\frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\,h-\frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\,k}{\|(h,k)\|}=\frac{r_f(h,k)}{\|(h,k)\|}+\frac{r_g(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

Por la hipótesis de diferenciabilidad de *f* y *g* sabemos que

$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r_f(h,k)}{\|(h,k)\|}=0$ y $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r_g(h,k)}{\|(h,k)\|}=0$ por lo que, al tomar límite a ambos miembros de la igualdad anterior llegamos a que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r_{(f+g)}(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

con lo que la función $f+g$ resulta diferenciable en (x_0, y_0)

Concepto de gradiente

Volviendo a la expresión de la diferencial

$$df(x_0, y_0; h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k$$

vemos que al segundo miembro lo podemos expresar como el producto escalar entre el vector de los incrementos (h,k) por otro vector cuyas componentes son las derivadas parciales

$$df(x_0, y_0; h, k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot (h,k)$$

A este vector de las derivadas parciales lo llamaremos **vector gradiente** de *f*, y lo denotaremos por $\nabla f(x_0, y_0)$ o grad $f(x_0, y_0)$.

Por tanto

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

y la expresión de la diferencial puede verse como:

$$df(x_0, y_0; h, k) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot (h,k)$$

Para tres variables denotamos el vector de los incrementos por (dx, dy, dz):

$$df(x_0, y_0, z_0; dx, dy, dz) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$df(x_0, y_0, z_0; dx, dy, dz) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \right) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$df(x_0, y_0, z_0; dx, dy, dz) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\, dz$$

Análogamente se extiende para *n* variables.

3.15.-

Hallar el vector gradiente en cada punto que exista para las funciones escalares definidas a continuación:

$a)\ f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(x.y)$ $\qquad d)\ f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$

$b)\ f(x,y) = e^x \cos y$ $\qquad e)\ f(x,y,z) = \ln(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$

$c)\ f(x,y,z) = x^2 y^3 z^4$ $\qquad f)\ f(x,y,z) = x^{y^z}$

El caso más general es la expresión de la diferencial para una función vectorial de *n* variables y *m* componentes.

$\mathbf{F}: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \,/\, \mathbf{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right)$

Supongamos D abierto y $\mathbf{F}$ diferenciable en un punto P de D. $P = \left(x_{1_0}, x_{2_0}, \ldots, x_{n_0}\right)$.

Para cada una de las funciones componentes de **F**, calculamos el vector gradiente y lo evaluamos en el punto P. A estos vectores gradiente los ordenamos como las filas de una matriz.

A tal matriz le damos el nombre de matriz jacobiana de **F**, y la simbolizamos: $J\,\mathbf{F}(P)$

$$d\mathbf{F}(P; dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) = \begin{bmatrix} \nabla f_1(P) \\ \nabla f_2(P) \\ \nabla f_3(P) \\ \vdots \\ \nabla f_m(P) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(P) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{bmatrix}}_{J\mathbf{F}(P)} \cdot \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

Resaltemos aquí que la dimensión de la matriz jacobiana es de $\mathbf{m} \times \mathbf{n}$.

3.16.-

Las siguientes son funciones diferenciables. Calcular las diferenciales en forma general, y luego evaluarlas en los puntos dados:

$i)$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x, y) = x^2$; $P = (a, b)$

$ii)$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x, y) = \cos y$; $P = (a, b)$

$iii)$ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x, y) = x^2 \cos y$; $P = (2, \pi/4)$

$iv)$ $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \,/\, f(x, y, z) = \left(x^2 y \operatorname{sen} z, x^3 y^2 z\right)$; $P = (1, 3, \pi)$

$v)$ $f(x, y) = x^y$, $x > 0$ $\quad P = (1, 0)$

$vi)$ $f(x, y) = \cos(x.\cos y)$; $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad P = (0, 0)$

<u>Problemas propuestos</u>

1.- Sea la función diferenciable $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = \left(\operatorname{sen}(x.y + z), (1 + x^2)^{yz}\right)$

Calcular la diferencial de *f* en el punto (1, -1, 1).

2.- Sea la función diferenciable $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(u, v) = \left(u + e^v, v - e^u\right)$

Calcular la diferencial de *f* en el punto (0, ½).

3.- Usando las funciones dadas en 1 y 2, calcular la diferencial de $(g \circ f)(1,-1,1)$

4.- Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$, y sea **p** un punto de *U*. A continuación se dan ocho afirmaciones sobre la función *f*:

1) *f* es diferenciable en **p**.
2) *f* es continua respecto de su primera variable en **p**.
3) *f* es continua respecto de su segunda variable en **p**.
4) *f* es continua en **p** en la dirección de algún vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.
5) *f* es continua en **p** en la dirección de todo vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.
6) *f* tiene derivadas parciales en **p**.
7) *f* tiene derivadas direccionales en **p** en la dirección de cualquier vector $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.
8) *f* tiene derivadas parciales continuas en alguna bola *B* contenida en *U* con centro en **p**.

Llenar el siguiente cuadro, indicando con una **V** en la línea i y columna j, cuando la afirmación de la línea i implique la afirmación de la columna j, y con una **F** cuando no la implique.

Por ejemplo: la afirmación 1 implica a la 6, pero la recíproca no es cierta. Esas respuestas ya aparecen en la tabla.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1						**V**		
2								
3								
4								
5								
6	**F**							
7								
8								

Parcial 2005

Dada la siguiente función, continua en el origen, probar que no es diferenciable en dicho punto:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Parcial 2007

Analizar: continuidad y diferenciabilidad en P= (0,0) de la siguiente función:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y - 2x^3}{x^2 + y^4} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Parcial 2010

Estudiar la diferenciabilidad de la siguiente función en (0,0)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2 + y^2} & si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Recuperatorio 2011

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & si \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$, analizar la diferenciabilidad de *f* en $P = (0,0)$.

Final febrero 2015

Dada $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$ estudiar:

a) Continuidad de *f* en (0,0).

b) Existencia y continuidad de las derivadas parciales de *f* en (0,0).

c) Diferenciabilidad de *f* en (0,0).