MÓDULO 4

- **DERIVADA DIRECCIONAL Y GRADIENTE**
- **REGLA DE LA CADENA**

Derivada direccional y gradiente

Cuando las funciones son diferenciables, tenemos una forma más sencilla de calcular las derivadas direccionales.

Teorema

Sea $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, U abierto, $(x_0, y_0) \in U$, diferenciable en (x_0, y_0) y $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ con $\|\mathbf{v}\| = 1$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v}$$

Demostración

Por ser f diferenciable en (x_0, y_0), se cumple que:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, k + r(h,k) \qquad (1)$$

con $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$

Si hacemos $(h,k) = t\,(v_1, v_2)$ con $t \in \mathbb{R} / t\,\mathbf{v} \in U$ en (1)

$$f(x_0 + t\,v_1, y_0 + t\,v_2) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\, t\, v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, t\, v_2 + r(t\,v_1, t\,v_2)$$

Dividiendo m.a m. por t nos queda:

$$\frac{f(x_0 + t\,v_1, y_0 + t\,v_2) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\; v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\; v_2 + \frac{r(t\,v_1, t\,v_2)}{t} \quad (2)$$

La idea ahora es tomar a ambos miembros $\lim\limits_{t\to 0}$

En el segundo miembro, los dos primeros términos son constantes para *t*, por lo que tales límites existen. Debemos ver que pasa con $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{r(t\,v_1, t\,v_2)}{t}$

Puesto que $(h,k) = t\,\mathbf{v}$; $(h,k) \to (0,0) \Leftrightarrow t \to 0$.

Además $\|(h,k)\| = \|t\,\mathbf{v}\| = |t|\underbrace{\|\mathbf{v}\|}_{1} = |t| \therefore t = \pm\|(h,k)\|$

Con esto

$$\lim_{t\to 0}\frac{r(t\,v_1,t\,v_2)}{t}=\pm\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}=0$$

Así pues, el límite del tercer término del segundo miembro de (2) también existe, con lo cual vale la propiedad de que “el límite de la suma es la suma de los límites”, y podemos aplicarla.

Tomamos entonces $\lim\limits_{t\to 0}$ a ambos miembros de (2)

$$\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t\,v_1,y_0+t\,v_2)-f(x_0,y_0)}{t}}_{\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\ v_1+\lim_{t\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\ v_2+\underbrace{\lim_{t\to 0}\frac{r(t\,v_1,t\,v_2)}{t}}_{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)(v_1,v_2)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{v}$$

Esta propiedad vale para funciones de mayor número de variables, en el caso de tres, se escribe:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0,y_0,z_0)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot\mathbf{v}\quad \text{con } \mathbf{v}=(v_1,v_2,v_3)\ \text{unitario}$$

Ejemplo

Dada $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ vamos a calcular su derivada direccional en el punto $(1,1,0)$ y en dirección de $\mathbf{v}=\breve{i}-\breve{j}+2\breve{k}$

De acuerdo a lo anterior debemos calcular:

$$\nabla f(1,1,0)=(2,4,0)\qquad \mathbf{v}=(1,-1,2)\rightarrow\breve{\mathbf{v}}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\text{, entonces}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,1,0)=(2,4,0).\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{6}}$$

4.1.-

Calcular, usando la relación con el vector gradiente, las derivadas direccionales de las siguientes funciones escalares en los puntos y direcciones que se indican:

$a)$ $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ en $(1,1,0)$ en dirección $\breve{i}-\breve{j}+2\breve{k}$

$b)$ $f(x,y,z)=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$ en $(1,1,1)$ en dirección $2\breve{i}+\breve{j}-\breve{k}$.

4.2.-

Dada la función $f(x,y,z)=x.e^{yz}+y.e^{xz}+z.e^{xy}$. Hallar la derivada direccional en $P=(1,0,2)$ y en la dirección que va de P a $Q=(5,3,3)$

4.3.-

Un campo escalar diferenciable *f*, tiene en el punto (1,2) las derivadas direccionales 2 en dirección al punto (2,2) y –2 en dirección al punto (1,1). Determinar el vector gradiente en (1,2) y calcular la derivada direccional en ese punto y en dirección al punto (4,6).

Direcciones de máximo crecimiento

Cuando introdujimos el concepto de derivada direccional, dijimos que la interpretación geométrica era levantar un plano perpendicular al *xy*, cortar a la gráfica de *f*, obtener una curva plana, y a ésta calcularle la derivada como en el Cálculo de una variable. Es decir obteníamos la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva en el punto considerado.

Ahora bien, podríamos preguntarnos, de todas las direcciones posibles en las que podemos calcular las derivadas direccionales ¿cuál será aquella dirección que rinda la pendiente mayor?

Es decir, hacia dónde debemos dirigirnos para "trepar" la gráfica de *f* lo más empinadamente posible?

Teorema

Sea $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, D$ abierto, $(x_0, y_0) \in D$, f **diferenciable** en (x_0, y_0) y $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$.

El valor máximo de la derivada direccional de *f*, $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$ es $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ y se da cuando **v** tiene la misma dirección que el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$.

Demostración

Por la relación entre la derivada direccional y el gradiente, tenemos que

$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \|\mathbf{v}\| \cos\alpha$, donde α es el ángulo formado entre $\nabla f(x_0, y_0)$ y **v**.

Como **v** es unitario nos queda:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \|\nabla f(x_0, y_0)\| \cos\alpha$$

y puesto que $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$, el valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0)$ se dará cuando $\cos\alpha = 1$ y esto ocurre si $\alpha = 0$.

Por lo tanto, la dirección que debe tener el vector **v** para que la derivada direccional tome su valor máximo debe ser la misma dirección que la del vector $\nabla f(x_0, y_0)$.

Y el valor de esa pendiente máxima resulta ser:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \| \nabla f(x_0, y_0) \|$$

En otras palabras, si estamos parados en un punto de la gráfica de *f* y deseamos movernos en la dirección en la que *f* crece más rápidamente, debemos hacerlo en la dirección de $\nabla f(x_0, y_0)$.

De manera análoga, si deseamos movernos en la dirección en la cual *f* decrece más rápidamente debemos hacerlo en la dirección $-\nabla f(x_0, y_0)$.

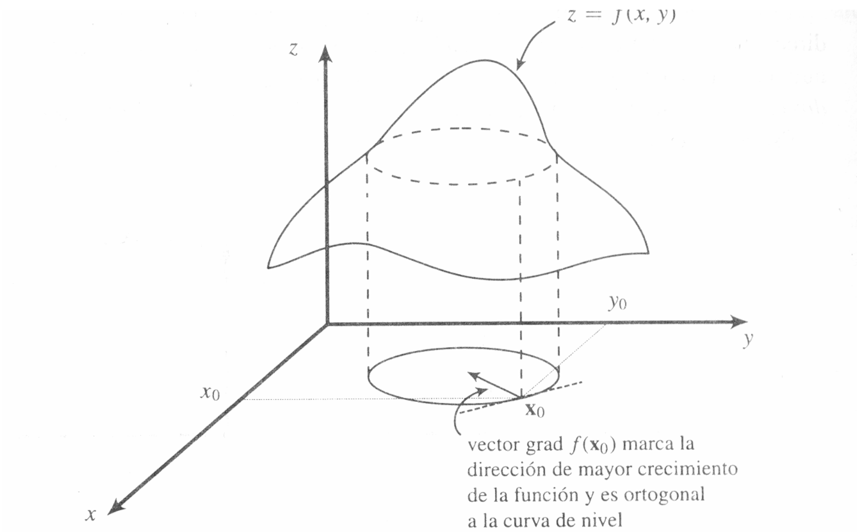
<u>El vector gradiente es ortogonal a la curva de nivel</u>

Otra consecuencia importante que se deduce de la relación de la derivada direccional con el gradiente es que si nos encontramos en un punto de una curva de nivel y el vector de la dirección de la derivada direccional es tangente a la curva, el valor de la derivada direccional es **cero**, ya que no hay variación de *f* en una curva de nivel.

Es decir que

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \mathbf{v} = 0$$

esto significa que $\nabla f(x_0, y_0) \perp \mathbf{v}$, es decir que el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ es **ortogonal** a la curva de nivel de *f*.



4.4.-

Sea $u(x, y, z) = 2xy - z^2$

a) Hallar la derivada de *u* en el punto (2 ; -1 ; 1) hacia el (3 ; 1 ; -1).

b) ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional?

c) ¿Cuál es el valor de ese máximo?

4.5.-

Hallar los valores de las constantes *a*, *b*, *c*, tales que la derivada direccional de $f(x,y,z)=axy^2+byz+cz^2x^3$ en el punto (1 ; 2 ; -1) tenga valor máximo 64 en la dirección paralela al eje *z*.

<u>Regla de la Cadena</u>

De la misma forma que para derivar la composición de funciones de una variable se utilizó la regla de la cadena, ahora para derivar la composición de funciones de más de una variable veremos que lo que necesitamos es una extensión de esa regla. Esta generalización toma formas ligeramente diferentes, dependiendo del número de variables independientes.

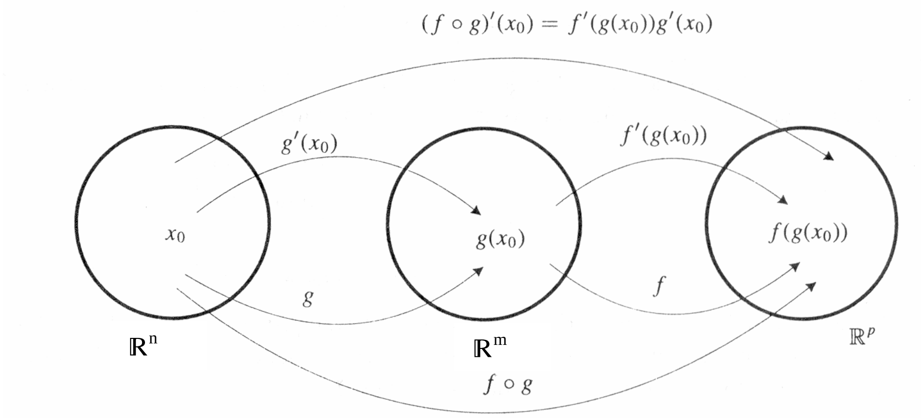
Previamente vamos a precisar cuando es válida la composición de dos funciones.

Sean $\mathrm{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}$ y $\mathrm{U}\subseteq\mathbb{R}^{m}$ dos conjuntos abiertos y sean $g:\mathrm{V}\subseteq\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{m}$ y $f:\mathrm{U}\subseteq\mathbb{R}^{m}\to\mathbb{R}^{p}$ dos funciones continuas. Supongamos que $\boldsymbol{x_0}\in\mathrm{V}$ es tal que $g(\boldsymbol{x_0})\in\mathrm{U}$, entonces $\mathrm{V}'=g^{-1}(\mathrm{U})\subseteq\mathrm{V}$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^{n}$ que contiene a $\boldsymbol{x_0}$ y en V' está definida la **función compuesta** $f\circ g:\mathrm{V}'\subseteq\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{p}$ por $(f\circ g)(\boldsymbol{x})=f(g(\boldsymbol{x}))$

<u>Teorema</u> (Regla de la cadena)

Sea $g:\mathrm{V}'\subseteq\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{m}$ una función definida en el conjunto abierto $\mathrm{V}'\subseteq\mathbb{R}^{n}$, diferenciable en $\boldsymbol{x_0}\in\mathrm{V}'$. Sea $f:\mathrm{U}\subseteq\mathbb{R}^{m}\to\mathbb{R}^{p}$ una función definida en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^{m}$. Si *g* es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$ y *f* diferenciable en $g(\boldsymbol{x_0})\in\mathrm{U}$ entonces la función $f\circ g:\mathrm{V}'\subseteq\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{p}$ es diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$ y su derivada viene dada por la matriz

$$\underbrace{J(f\circ g)(\boldsymbol{x_0})}_{p\times n}=\underbrace{Jf(g(\boldsymbol{x_0}))}_{p\times m}.\underbrace{Jg(\boldsymbol{x_0})}_{m\times n}$$



Ejemplo 1

Sea $f:\mathrm{U}\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la función dada por $f(x,y)=x^2+3y^2$ y sea $g:\mathrm{U}\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ la función $g(t)=(g_1(t),g_2(t))=\left(e^t,\cos t\right)$. Podemos sin hacer explícita la composición: $f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, calcular la derivada de la composición usando la fórmula dada en el teorema anterior.

$$\underbrace{J(f\circ g)(t)}_{1\times 1}=\underbrace{J(f(g(t)))}_{1\times 2}.\underbrace{Jf(g(t))}_{2\times 1}$$

$$=\nabla f(g(t)).\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial t}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial t}\end{bmatrix}=(2x,6y)\big|_{g(t)}.\begin{bmatrix}e^t\\ -\operatorname{sen} t\end{bmatrix}=2x\big|_{g(t)}\left(e^t\right)+6y\big|_{g(t)}(-\operatorname{sen} t)=$$

$$=2e^t.e^t+6\cos t.(-\operatorname{sen} t)=2e^{2t}-6\cos t\operatorname{sen} t$$

Se puede llegar al mismo resultado haciendo primero la composición :

$$(f\circ g)(t)=f(g(t))=f\left(e^t,\cos t\right)=e^{2t}+3\cos^2 t$$

y derivando esta composición con respecto a t

$$(f\circ g)'(t)=2e^{2t}-6\cos t.\operatorname{sen} t$$

Ejemplo 2

Consideremos las funciones diferenciables $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ y $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, dadas por:

$$g(x,y)=\left(xy,5x,y^3\right)$$

$$f(x,y)=\left(3x^2+y^2+z^2,5xyz\right)$$

La composición $f\circ g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ es diferenciable y su derivada es

$$J(f\circ g)(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}(f\circ g)_1(x,y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(f\circ g)_1(x,y)\\ \dfrac{\partial}{\partial x}(f\circ g)_2(x,y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(f\circ g)_2(x,y)\end{bmatrix}=\underbrace{Jf(g(x,y))}_{2x3}.\underbrace{Jg(x,y)}_{3x2}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(g(x,y)) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(g(x,y)) & \dfrac{\partial f_1}{\partial z}(g(x,y))\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(g(x,y)) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(g(x,y)) & \dfrac{\partial f_2}{\partial z}(g(x,y))\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}\\ \dfrac{\partial g_3}{\partial x} & \dfrac{\partial g_3}{\partial x}\end{bmatrix}=(1)$$

Sustituyendo $f_1(x,y,z)=3x^2+y^2+z^2$, $f_2(x,y,z)=5xyz$, $g_1(x,y)=xy$, $g_2(x,y)=5x$,

$g_3(x,y)=y^3$ nos queda:

$$(1)=\begin{bmatrix}6x & 2y & 2z\\ 5xy & 5xz & 5xy\end{bmatrix}_{g(x,y)}\begin{bmatrix}y & x\\ 5 & 0\\ 0 & 3y^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6(xy) & 2.(5x) & 2(y^3)\\ 5.(5x).(y^3) & 5(xy)(y^3) & 5(xy)(5x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y & x\\ 5 & 0\\ 0 & 3y^2\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}6xy^2+50x & 6x^2y+6y^5\\ 50xy^4 & 100x^2y^3\end{bmatrix}$$

También podemos llegar al mismo resultado si antes hacemos explícita la composición:

$$(f\circ g)(x,y)=f(g(x,y))=f(xy,5x,y^3)=\left(3(xy)^2+(5x)^2+(y^3)^2,5(xy).(5x)(y^3)\right)=$$

$$=\left(\underbrace{3x^2y^2+25x^2+y^6}_{f_1(g(x,y))},\ \underbrace{25x^2y^4}_{f_2(g(x,y))}\right)$$

$$(f\circ g)'(x,y)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(g(x,y))}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(g(x,y))}{\partial y}\\ \dfrac{\partial f_2(g(x,y))}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(g(x,y))}{\partial y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6xy^2+50x & 6x^2y+6y^5\\ 50xy^4 & 100x^2y^3\end{bmatrix}$$

Ejemplo 3

Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ y $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ las funciones $f(x,y,z)=(x^2+2,x+y^2+z^3)$ y $g(x,y,z)=(x+y+z,xyz,x^2+y^3)$, queremos hallar $J(f\circ g)(1,1,1)$

$$J(f(g(x,y,z)))=Jf(3,1,2).Jg(1,1,1)=\begin{bmatrix}2x & 0 & 0\\ 1 & 2y & 3x^2\end{bmatrix}_{(3,1,2)}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ yz & xz & xy\\ 2x & 3y^2 & 0\end{bmatrix}_{(1,1,1)}=$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 6 & 6\\ 27 & 39 & 3\end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

Hemos visto en el teorema que si la función es diferenciable entonces es válida la regla de la cadena pero si la función no es diferenciable no podemos asegurarlo.

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ /\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2\ /\ g(t)=(a.t,b.t)$. Queremos calcular $J(f\circ g)(0)$ usando regla de la cadena y por composición.

Por **regla de la cadena** obtenemos:

$$J(f \circ g)(t) = Jf(g(t)).Jg(t) = \nabla f(g(t)).\begin{pmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \end{pmatrix}$$

como el punto en cuestión es $t = 0$ que corresponde al $(x, y) = (0,0)$, donde se produce el salto de f debemos calcular las derivadas parciales por definición

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

$$J(f \circ g)(0) = (0,0).\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

Por **composición** obtenemos

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} \dfrac{ab^2 t}{a^2 + b^2} & si \;\; t \neq 0 \\ 0 & si \;\; t = 0 \end{cases}$$

En realidad no hay dos ramas en la función compuesta ya que si reemplazamos en la de arriba a t por cero da cero, entonces $(f \circ g)(t) = \dfrac{ab^2 t}{a^2 + b^2} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Derivando nos queda:

$$J(f \circ g)(0) = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

Este último es el resultado correcto, ya que al **no** ser f diferenciable en (0,0) **no** está garantizada la conclusión del teorema.

4.6.-

Sea $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$; $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$; si $f(x, y) = F[g(x, y)]$; calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ usando la regla de la cadena. Verificar el resultado calculando $f(x, y)$ explícitamente.

4.7.-

Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, g(x, y) = \left(\dfrac{x - y}{2}, \dfrac{x + y}{2} \right) = (u, v)$ y $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \,/\, f(u, v)$. diferenciable.

Si $F = f \circ g$ aplicar la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ en función de $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

4.8.-

Verificar la regla de la cadena para la composición $f \circ c$, en cada caso:

$a)\ f(x,y) = xy \quad c(t) = (e^t ; \cos t) \qquad b)\ f(x,y) = e^{xy} \quad c(t) = (3t^2 ; t^3)$

$c)\ f(x,y) = (x^2 + y^2)\ln\sqrt{x^2 + y^2} \qquad c(t) = (e^t ; e^{-t})$

<u>Diagrama de árbol</u>

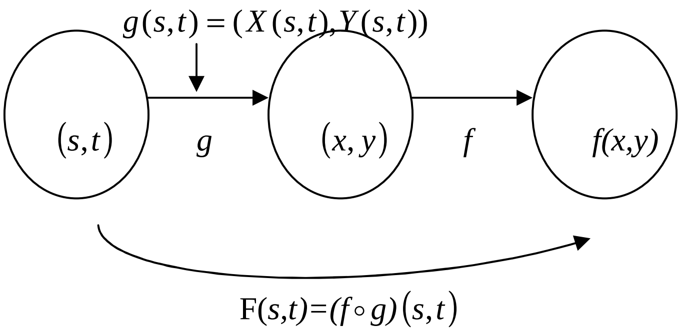
Existe una manera práctica de obtener los mismos resultados que con la regla de la cadena, llamada **diagrama de árbol**.

Esta regla **no** justifica de qué manera se obtienen los resultados sino que es solamente una forma práctica de hacerlo.

Vamos a ver con un ejemplo cómo funciona:

Ejemplo

Las ecuaciones $u = f(x,y)$; $x = X(s,t)$; $y = Y(s,t)$, $g(s,t) = (x,y) = (X(s,t), Y(s,t))$ definen $u = F(s,t)$



Por **regla de la cadena**

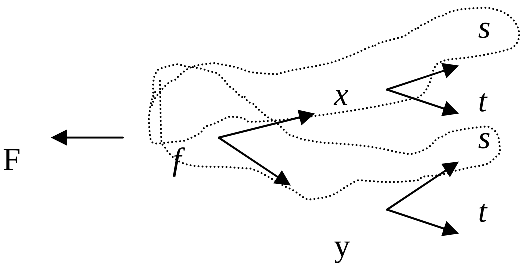
$$F(s,t) = (f \circ g)(s,t) = f[g(s,t)]$$

$$JF(s,t) = \underbrace{J f[g(s,t)]}_{1x2} . \underbrace{Jg(s,t)}_{2X2} = \nabla f[g(s,t)] Jg(s,t)$$

$$\nabla f[g(s,t)] = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{g(s,t)} \qquad Jg(s,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$JF(s,t)=\left(\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}}_{\frac{\partial F}{\partial s}},\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}}_{\frac{\partial F}{\partial t}}\right)$$

Por **diagrama de árbol**



Lo armamos empezando por la segunda función aplicada (f) que depende de (x, y).
A su vez x depende de (s,t)
También y depende de (s,t).
Debemos partir de la base del árbol (en este caso f) y llegar a todos los extremos donde figure la variable con respecto a la que derivamos.

Tenemos que derivar la salida respecto de la llegada, si seguimos en la rama del árbol multiplicamos, si cambiamos de rama, sumamos.

misma rama

$$\frac{\partial F}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

es la expresión marcada en el diagrama.

cambio de rama

4.9.-

Las ecuaciones $u=f(x,y); x=X(s,t); y=Y(s,t)$, definen $u=F(s,t)$.

a) Aplicar la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial s}$ y $\frac{\partial F}{\partial t}$ en función de

$\frac{\partial f}{\partial x};\frac{\partial f}{\partial y};\frac{\partial X}{\partial s};\frac{\partial X}{\partial t};\frac{\partial Y}{\partial s};\frac{\partial Y}{\partial t}$.

b) Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$; demostrar que:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2+2\frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial s}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2$$

c) Encontrar fórmulas parecidas para las derivadas parciales $\frac{\partial^2 F}{\partial s\partial t};\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$.

4.10.-

Resolver el ejercicio anterior en cada uno de los siguientes casos:

$a)\ X(s,t)=s+t \quad Y(s,t)=s.t \quad b)\ X(s,t)=s.t \quad Y(s,t)=\dfrac{s}{t} \quad c)\ X(s,t)=\dfrac{s-t}{2} \quad Y(s,t)=\dfrac{s+t}{2}$

4.11.-

Al usar las coordenadas polares, se cambia $f(x,y)$ en $\phi(r,\theta)$; con $x=r.\cos\theta$; $y=r.\operatorname{sen}\theta$.

Expresar $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r^2};\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r\,\partial\theta};\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2};\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta\,\partial r}$ en función de las derivadas parciales de *f*.

Problemas propuestos

Parcial 2001

Sean $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/f(x,y)=5x^2+7y^2$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2 / g(t)=\left(\operatorname{sen}3t\,,e^{2t}\right)$, hallar: $\dfrac{\partial^2(f\circ g)}{\partial t^2}(0)$.

Recuperatorio 2002

Si $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}/g(x,y)=\tan(x^3+y^2)$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ /\ f(t)=6^{\operatorname{sen}2t}$ hallar $\dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(x,y)$ usando la regla de la cadena. Verificar el resultado por composición y derivación.

Segundo recuperatorio 2005

Sean

$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ /\ f(x,y,z)=(x^2+2\,,x+y^2+z^3)$; $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3\ /\ g(x,y,z)=(x+y+z,\,x\,y\,z\,,x^2+y^3)$

Calcular: a) $J(f\circ g)(1{,}1{,}1)$ usando la regla de la cadena. b) Verificar el resultado por composición y derivación

Segundo recuperatorio 2009

Sean *f* y *g* funciones diferenciables dadas de la siguiente manera:

$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3\ /\ g(x,y)=\left(x\,y\,,5\,x\,,y^3\right)$ $\quad f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2\ /\ f(x,y,z)=\left(3x^2+y^2+z^2\,,5\,x\,y\,z\right)$

Calcular $J(f\circ g)(x,y)$ utilizando la regla de la cadena y verificar por composición y derivación.

Parcial 2011

Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y)=4x^3y^5$ en el punto P = (1,1) y en la dirección del vector tangente a la circunferencia $x^2+y^2=2$ en P.