Análisis Matemático II – Práctico 2

1. Calcular, si existen, los siguientes límites.

   a) $\lim_{t\to 2}\left(ti+\left(\frac{t^2-4}{t^2-2t}\right)j+\frac{1}{t}k\right)$

   b) $\lim_{t\to 0}\left(e^t i+\left(\frac{\operatorname{sen} 3t}{7t}\right)j+e^{-t}k\right)$

   c) $\lim_{t\to 0}\left(t^2 i+3tj+\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)k\right)$

   d) $\lim_{t\to 1}\left(\sqrt{t},\frac{\ln t}{t-1},2t^2\right)$

   e) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t},\cos t,\operatorname{sen} t\right)$

   f) $\lim_{t\to\infty}\left(e^{-t},\frac{1}{t},\frac{t}{t^2+1},\frac{7t^2+t}{t-2t^2}\right)$

2. Analizar el mayor intervalo en que es continua cada una de las siguientes funciones vectoriales.

   a) $r\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $r(t)=ti+\frac{1}{t}j$.

   b) $r\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $r(t)=\sqrt{t}i+\sqrt{t-1}j$.

   c) $r\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dada por $r(t)=(t,\operatorname{arc\,sen} t,t-1)$.

   d) $r\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ dada por $r(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t,\ln t)$.

3. Sea $r(t)$ la función que denota la posición de un objeto en movimiento en el instante t. Sean

   $$r_1(t)=(\operatorname{sen} t,\cos t)\quad \text{y}\quad r_2(t)=(\cos t,\operatorname{sen} t)\,,$$

   donde $0\leq t\leq 2\pi$. Explicar por qué se tienen dos trayectorias distintas a pesar de que ambas recorren la misma circunferencia. Indicar el punto inicial y el punto final en cada caso, como así también el sentido del recorrido.

4. Si pensamos que la función vectorial nos da la posición de un móvil en determinado tiempo t, indicar sobre cuál curva se desplaza si la posición viene dada por la función $r_1(t)=(t,t^2)$, con $0\leq t\leq 2$. ¿Y si está dada por la función $r_2(t)=(2t,4t^2)$, con $0\leq t\leq 1$?. En ambos casos indicar el punto inicial y el punto final. ¿Porqué son trayectorias diferentes?.

5. Dibujar las curvas representadas por las funciones vectoriales dadas a continuación.

a) $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $r(t) = (4\cos t, -2\operatorname{sen} t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.
b) $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $r(t) = (3t, t-1)$, con $0 \leq t \leq 2$.
c) $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $r(t) = (5\cos t, 5\operatorname{sen} t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.
d) $r\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $r(t) = (4\operatorname{sen} t, t, 4\cos t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.

6. Representar las siguientes ecuaciones mediante una función vectorial.

   a) $y = x^2 + 1$, desde $(3, 10)$ hasta $(-1, 2)$.
   b) $y = 4 - x$, donde $x \in [-2, 3]$.
   c) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, recorrida en sentido antihorario desde $(5, 0)$.

7. Una particula se mueve a lo largo de una recta desde el punto $(2, 3, 0)$ hacia el punto $(0, 8, 8)$. Hallar una función vectorial que describa tal trayectoria.

8. En cada uno de los siguientes casos, determinar el dominio, la derivada de la función vectorial y el vector tangente unitario.

   a) $r(t) = \left(t^2 - 4, \sqrt{t-4}, \sqrt{6-t}\right)$
   b) $r(t) = \left(te^{2t}, \dfrac{t-1}{t+1}\right)$

9. Las siguientes funciones vectoriales dan la posición de un objeto. Dibujar las trayectorias y los vectores velocidad y aceleración.

   a) $r(t) = (3t, t-1)$ en el punto $(3, 0)$.
   b) $r(t) = \left(t^2, t\right)$ en el punto $(4, 2)$.
   c) $r(t) = (t, 2t-5, 3t)$ en el punto $(3, 1, 9)$.

10. Representar gráficamente los siguientes campos vectoriales.

    a) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (-2, 0)$.
    b) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (-x, y)$.
    c) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (-y, x)$.
    d) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (2x, y)$.

11. Analizar la mayor región en que es continua cada una de las siguientes funciones.

    a) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (xy, x + y)$.
    b) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = \left(\dfrac{5}{x+y}, x - y^2\right)$.

c) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y) = \left(\dfrac{1}{x}, \cos y\right)$.

d) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y) = \left(\dfrac{1}{y}, \dfrac{1}{x}\right)$.

12. Determinar el mayor dominio de las siguientes funciones y representarlos.

    a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{36 - x^2 - y^2}$.
    b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - 4y^2}$.
    c) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{x}$.
    d) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}{y}$.
    e) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{x}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$.
    f) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{16 - x^2 - 4y^2}}$.
    g) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x - y}$.
    h) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \dfrac{x}{|y|}$.
    i) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{36 - x^2 - y^2 - z^2}}{x + y + z}$.
    j) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \dfrac{17}{\sqrt{36 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

13. Utilizando el Geogebra, graficar las siguientes funciones y dibujar sus curvas de nivel para los valores correspondientes de c.

    a) $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ y $c = \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, 2$.
    b) $f(x,y) = \ln(x - y)$ y $c = 0, \dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}, 2$.
    c) $f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ y $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
    d) $f(x,y) = xy$ y $c = 1, -1, 3, -3$.

14. Comprobar que un entorno rectangular incluye a un entorno circular y recíprocamente.

15. Demostrar los siguientes límites usando la definición.

    a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} (4x - 3y) = 6$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,1)} (7x+2y) = -12$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \cos(x+y) = 1$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{5}{x+y} = \frac{5}{3}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{2x}{y+3} = \frac{1}{2}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{3x+1}{2y+3} = \frac{7}{5}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \left(4x^2+4y^2\right) = 8$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} \left(x^2+2x-3y\right) = -4$

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(3,2)} \left(x^2+8x+y^2-12y\right) = 13$

16. Evaluar los siguientes límites, empleando las propiedades.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,3)} \left(3x^2+xy-2y^2\right)$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-1)} \frac{x^3+8y^3}{x+2y}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-2,4)} y\sqrt[3]{x^3+2y}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x+e^y}{\cos x+\operatorname{sen} y}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x-e^y}{e^{-x}-e^{-y}}$

17. Probar que no existen los siguientes límites en el punto $(0,0)$.

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^4+3x^2y^2+2xy^3}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x^9y}{\left(x^6+y^2\right)^2}$

18. Analizar la existencia de los siguientes límites.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x^2+e^y}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

19. Usar el cambio de coordenadas polares para analizar la existencia de los siguientes límites. De conjeturar que existen, probar por definición.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\operatorname{sen}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y+xy^3}{x^2+y^2}$

20. Hallar el mayor conjunto de puntos donde es continua cada una de las siguientes funciones.

a)

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{xy} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

b) $f(x,y) = \dfrac{6x-2y}{9x^2-y^2}$

c) $f(x,y) = e^{xy}$

d) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$

e) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \cos y$

f) $f(x,y) = 1 - \dfrac{\cos\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

g) $f(x,y) = \dfrac{2}{y-x^2}$

h) $f(x,y) = \dfrac{x-2y}{x^2+y^2}$

21. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en todos los puntos del plano $\mathbb{R}^2$.

a)
$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+2y-1 & \text{si } x \geq 0 \\ 3x+y^2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,1) \end{cases}$$

c)
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

22. Indicar si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos, justificando las respuestas.

a) Si $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x,b) = l$.

b) Si $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x,b) = l$, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = l$.

c) Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua para todo $(x,y) \neq (0,0)$ y $f(0,0) = 0$, entonces $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

d) Si $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x,y) = g(x) + h(y)$, siendo g y h son continuas, entonces f es continua.