Análisis Matemático II – Práctico 3

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2+y^2$. Calcular la derivada direccional de f en el punto $(x_0, y_o) \in \mathbb{R}^2$ en la dirección del vector $v = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Evaluar la derivada obtenida en $\theta = 0$ y $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = 2x^3 + 7y^2 + 9z^2$ y sea $v = (a,b,c)$ un vector unitario dado en el espacio $\mathbb{R}^3$. Calcular la derivada direccional de esta función en el punto $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ en la dirección de v.

3. Hallar la derivada direccional de la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = (x-1)^2 + (y-1)^2$$

en el punto $(0,0)$ en la dirección del vector unitario $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4. Si la derivada direccional fuera una buena extensión de la derivada unidimensional, debería conservar todas sus propiedades. Entre ellas, que la derivabilidad implique la continuidad. El siguiente ejercicio da cuenta de que esto no ocurre.

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

y sea $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario.

a) Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0)$.

b) Analizar la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

Más adelante veremos que la *diferencial* es una buena extensión de la derivada de una variable.

5. Hallar las derivadas parciales primeras con respecto a x e y, aplicando las reglas de derivación.

a) $f(x,y) = 2x - 3y + 5$

b) $f(x,y) = x^2 e^{2y}$

c) $f(x,y) = \ln(\sqrt{xy})\,,\quad 0 < xy$

d) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

e) $z = \dfrac{x}{y}\,,\quad y \neq 0$

f) $z = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$

g) $f(x,y) = \operatorname{sen}(3x)\cos(3y)$

h) $g(x,y) = xe^y \operatorname{sen}(xy)$

6. La ecuación de Van der Waal para el estado gaseoso es

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde P es la presión del gas, V el volumen, T la temperatura (en Kelvin), n el número de moles, R es la constante universal de los gases, a y b constantes. Calcular e interpretar $\dfrac{\partial P}{\partial V}$ y $\dfrac{\partial T}{\partial P}$.

7. La flexión de una viga de longitud L, ancho w y altura h, viene dada por

$$S(L,w,h) = c\frac{L^4}{wh^3}$$

donde c es una constante. Demostrar que $\dfrac{\partial S}{\partial L} = \dfrac{4}{L}S$, $\dfrac{\partial S}{\partial w} = -\dfrac{1}{w}S$ y $\dfrac{\partial S}{\partial h} = -\dfrac{3}{h}S$. Usar el resultado para determinar cuál variable tiene el efecto proporcional mayor sobre la flexión.

8. Hallar todas las derivadas parciales segundas de las siguientes funciones.

a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$

b) $f(x,y) = e^x \tan y$

c) $z = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

d) $z = xe^y + ye^x$

e) $f(x,y) = xe^{-y^2}$

f) $g(x,y) = \operatorname{sen}(x - 2y)$

9. Verificar que las funciones $z = \operatorname{sen}(x - ct)$ y $z = \operatorname{sen}(wct)\operatorname{sen}(wx)$ satisfacen la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

10. Verificar que cada una de las siguientes funciones satisface la ecuación del calor $\dfrac{\partial f}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

a) $f(x,t) = e^{-t}\cos\left(\dfrac{x}{c}\right)$

b) $f(x,t) = e^{-t}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{c}\right)$

11. Verificar que cada una de las siguientes funciones satisface la ecuación de Laplace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

    a) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$

    b) $f(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^y - e^{-y}\right)\operatorname{sen} x$

    c) $f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$

12. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    Demostrar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$.

13. Analizar cuáles de las siguientes funciones $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en el punto dado.

    a)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    en $P = (0,0)$.

    b) $f(x,y) = xy^2$ en $P = (0,0)$.

    c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $P = (x_0, y_0)$.

    d)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    en $P = (0,0)$.

14. Analizar la diferenciabilidad de la siguiente función en el punto indicado.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    en $P = (0,0)$.

15. Hallar el vector gradiente (en cada punto que exista) de las siguientes funciones escalares:

    a) $f(x,y) = x^2 + y^2 \operatorname{sen}(xy)$
    b) $f(x,y) = e^x \cos y$
    c) $f(x,y,z) = x^2 y^3 z^4$
    d) $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$
    e) $f(x,y,z) = \ln\left(x^2 + 2y^2 - 3z^2\right)$
    f) $f(x,y,z) = x^{y^z}$

16. Las siguientes funciones son diferenciables. Calcular las diferenciales en forma general y evaluarlas en los puntos dados.

    a) $f(x,y) = x^2$ en el punto $P = (a,b)$.
    b) $f(x,y) = \cos y$ en el punto $P = (a,b)$.
    c) $f(x,y) = x^2 \cos y$ en el punto $P = \left(2, \dfrac{\pi}{4}\right)$.
    d) $f(x,y,z) = \left(x^2 y \operatorname{sen} z, x^3 y^2 z\right)$ en el punto $P = (1,3,\pi)$.
    e) $f(x,y) = x^y$, con $0 < x$ en el punto $P = (1,0)$.
    f) $f(x,y) = \cos(x \cos y)$ en el punto $P = (0,0)$.