Análisis Matemático II – Práctico 4

1. Calcular, usando la relación con el vector gradiente, las derivadas direccionales de las siguientes funciones escalares en los puntos y direcciones que se indican.

   a) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ en el punto $P = (1,1,0)$ en la dirección $i - j + 2k$.

   b) $f(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$ en el punto $P = (1,1,1)$ en la dirección $2i + j - k$.

2. Dada la función $f(x,y,z) = xe^{yz} + ye^{xz} + ze^{xy}$, hallar la derivada direccional en el punto $P = (1,0,2)$ en la dirección que va de P a $Q = (5,3,3)$.

3. Un campo escalar diferencial f tiene en el punto $(1,2)$ las derivadas direccionales 2 en dirección al punto $(2,2)$ y -2 en dirección al punto $(1,1)$. Determinar el vector gradiente en $(1,2)$ y calcular la derivada direccional en ese punto y en dirección al punto $(4,6)$.

4. Sea $u(x,y,z) = 2xy - z^2$.

   a) Hallar la derivada de u en el punto $(2,-1,1)$ hacia el $(3,1,-1)$.

   b) ¿En qué dirección es máxima la derivada direccional?.

   c) ¿Cuál es el valor de ese máximo?.

5. Hallar los valores de las constantes a, b, c tales que la derivada direccional de $f(x,y,z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ en el punto $(1,2,-1)$ tenga valor máximo 64 en la dirección paralela al eje z.

6. Sean $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos\left(x^2 + y^2\right)$. Si $f(x,y) = F[g(x,y)]$, calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ usando la regla de la cadena. Verificar el resultado calculando $f(x,y)$ explícitamente.

7. Sea $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x,y) = \left(\dfrac{x-y}{2}, \dfrac{x+y}{2}\right) = (u,v)$ y consideremos $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(u,v)$ diferenciable. Si $F = f \circ g$, aplicar la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ en función de $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial v}$.

8. Verificar la regla de la cadena para la composición $f \circ g$ en cada uno de los siguientes casos.

a) $f(x,y) = xy$ y $g(t) = \big(e^t, \cos t\big)$.

b) $f(x,y) = e^{xy}$ y $g(t) = \big(3t^2, t^3\big)$.

c) $f(x,y) = \big(x^2+y^2\big)\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ y $g(t) = \big(e^t, e^{-t}\big)$.

9. Las ecuaciones $u = f(x,y)$, $x = X(s,t)$, $y = Y(s,t)$, definen $u = F(s,t)$.

   a) Aplicar la regla de la cadena para expresar las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial t}$ en función de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial X}{\partial s}$, $\dfrac{\partial X}{\partial t}$, $\dfrac{\partial Y}{\partial s}$ y $\dfrac{\partial Y}{\partial t}$.

   b) Si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$, demostrar que

   $$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + 2\frac{\partial X}{\partial s}\frac{\partial Y}{\partial s}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2$$

   c) Encontrar fórmulas parecidas para las derivadas parciales $\dfrac{\partial^2 F}{\partial s\partial t}$ y $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2}$.

10. Resolver el ejercicio anterior en cada uno de los siguientes casos.

    a) $X(s,t) = s+t$, $Y(s,t) = st$.

    b) $X(s,t) = st$, $Y(s,t) = \dfrac{s}{t}$.

    c) $X(s,t) = \dfrac{s-t}{2}$, $Y(s,t) = \dfrac{s+t}{2}$.

11. Al usar las coordenadas polares, se cambia $f(x,y)$ en $\phi(r,\theta)$, con $x = r\cos\theta$ e $y = r\operatorname{sen}\theta$. Expresar $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}$, $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}$ y $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial\theta\partial r}$ en función de las derivadas parciales de f.