Análisis Matemático II – Práctico 5

1. Calcular el jacobiano del cambio de variables indicado.

   a) $x = -\dfrac{1}{2}(u - v), \quad y = \dfrac{1}{2}(u + v)$

   b) $x = u - v^2, \quad y = u + v$

   c) $x = u - uv, \quad y = uv$

2. Consideremos la ecuación $x^3y + y^2 - xy^5 - 1 = 0$.

   a) Demostrar que la ecuación define implícitamente una función de la forma $y = f(x)$ alrededor del punto $(1, 1)$.

   b) ¿Cuál es el valor de la pendiente de la función implícita en $(1, 1)$?.

   c) ¿Cómo es la concavidad de f alrededor de $(1, 1)$?.

   d) Hacer un bosquejo de la gráfica de f en una vecindad de $(1, 1)$.

3. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$. Calcular la derivada primera y segunda de la función implícita $y = g(x)$ definida por $f(x, y) = 0$.

4. Calcular la derivada primera y segunda de la función implícita $y = f(x)$ definida por la ecuación $\ln\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

5. Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Analizar para qué puntos de $\mathbb{R}^2$ es aplicable el teorema de la función implícita para definir una función $y = f(x)$ tal que $F(x, y) = 0$. Para esos puntos, hallar y'.

6. Considerar $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = x^4 - e^{xy^3-1}$. Probar que en un entorno del punto $(1, 1)$ es aplicable el teorema de la función implícita y calcular y'. Luego, hacer $F(x, y) = 0$, despejar $y = f(x)$ y verificar el resultado por derivación.

7. Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y) = e^{2y+x} + \operatorname{sen}\left(x^2 + y\right) - 1$. Obtener un punto de $\mathbb{R}^2$ en cuya vecindad sea aplicable el teorema de la función implícita y obtener y'. Observar que en este caso no es posible hacer explícita la función $y = f(x)$, pero sí su derivada.

8. Dada $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$, indicar un punto de $\mathbb{R}^2$ alrededor del cual se verifique el teorema de la función implícita, y obtener para tal punto la derivada primera y segunda de $y = f(x)$.

9. Sea $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $F(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0$.

a) Hallar el valor de c tal que $F(0,e,2)=0$.

b) Obtener $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, si $z=f(x,y)$.

10. La expresión x^2+y^2+2axy, con $a>1$, define una función $y=y(x)$. Probar que $\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$.

11. Estudiar si g es localmente inversible, es decir, si $|Jg(s,t)\neq 0|$, para todo $(s,t)\in\Delta$. En caso afirmativo, determinar g^{-1}.

    a) $g(s,t)=(s+2t,s-t)$, donde $\Delta=\mathbb{R}^2$.

    b) $g(s,t)=(s^2-s-2,3t)$, donde $\Delta=\mathbb{R}^2$.

    c) $g(s,t)=(2s+3t,s-4t)$, donde $\Delta=\mathbb{R}^2$.

    d) $g(s,t)=(s^2-t^2,st)$, donde $\Delta=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

12. Sea $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $f(x,y,z)=(\operatorname{sen}(x+z),\operatorname{sen}(y+z),e^y)$.

    a) Demostrar que f es localmente inversible en el punto $(0,0,0)$.

    b) Ver que existen puntos en $\mathbb{R}^3$ donde no se cumplen las condiciones del teorema de la función inversa, es decir, donde $|f'(x_0,y_0,z_0)|=0$.

13. Sea $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y)=\big(e^{2x}-e^y,e^y\big)$.

    a) Probar que f es localmente inversible en un entorno de cada punto $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$.

    b) Obtener f^{-1} para los puntos (x,y) de dichos entornos.

    c) Comprobar que las matrices derivadas de f y f', en puntos correspondientes, son inversas una de la otra.

14. Sea $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ dada por $g(s,t,u)=(u\cos(st),u\operatorname{sen}(st),s+u)$. En particular, vale que $g(1,0,1)=g(1,0,2)$. Calcular $Jg^{-1}(1,0,2)$.