Análisis Matemático II – Práctico 6

1. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \operatorname{sen}(x+2y)$. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función f en un entorno del punto $(0,0)$.

2. Determinar el polinomio de Taylor de orden 2 para la función $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ alrededor del punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$. Sugerencia: hacer el cambio de variables $x = x_0 + h$; $y = y_0 + h$.

3. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de la función $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} z - \operatorname{sen}(x+y+z)$ en un entorno del punto $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

4. Sea $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 - 3x^2y^2 + z^2$. Hallar la diferencial segunda de f en el punto $(-1,0,1)$.

5. Mostrar que la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $z = x^2 + y^3$ en el punto $(3,1,10)$ es $z = 6x + 3y - 11$.

6. Escribir las ecuaciones de los planos tangentes a las superficies en los puntos que se indican:

   a) El paraboloide $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1,-2,5)$.

   b) El cono $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{z^2}{8} = 0$ en el punto $(4,3,4)$.

   c) La esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$ en el punto $(r\cos\alpha, r\operatorname{sen}\alpha, r)$.

7. Dada la superficie $f(x,y,z) = 3x^2 + \frac{16}{3}y^2 - 2z^2 - 6x = 0$, determinar los puntos (si existen) en donde los planos tangentes son paralelos a los planos coordenados.

8. Demostrar que el elipsoide $x^2 + 3y^2 + 2z^2 = 9$ es tangente a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 8y - 6z + 24 = 0$ en el punto $(2,1,1)$.

9. Probar que todos los planos tangentes a la superficie $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ en el punto $M = (x_0, y_0, z_0)$, donde $x_0 \neq 0$, pasan por el origen de coordenadas.

10. Hallar y clasificar (si existen) los puntos críticos de las siguientes funciones.

    a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$

    b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

    c) $f(x,y) = (x-y+1)^2$

d) $g(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 3x^2 - 3y^2 + 4$

e) $h(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$

f) $g(x,y) = e^{(x-y)}(x^2 - 2y^2)$

g) $h(x,y) = 2x^3 + 2y^2 - 12xy + 6y + 12x - 21$

h) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 4x^2 - 2y^2$

i) $f(x,y) = \cos x \cos y$, donde $0 < x < 2\pi$ y $0 < y < 2\pi$.

j) $f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos y$, donde $0 < x < 2\pi$ y $0 < y < 2\pi$.

k) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 - 2xy - x - 2z$

11. Sea $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2 + y^2$. Demostrar que sobre la recta $y = mx$, la función f tiene un mínimo en $(0,0)$, pero que no existe un mínimo relativo a ningún entorno bidimensional del origen. Graficar indicando el conjunto de puntos (x,y) donde $f(x,y) > 0$ y en donde $f(x,y) < 0$.

12. *Método de los mínimos cuadrados:* dados n números distintos $x_1, \ldots, x_n$ y otros n números $y_1, \ldots, y_n$, en general no es posible encontrar una recta $f(x) = ax + b$ tal que $f(x_i) = y_i$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. No obstante, se puede encontrar una función lineal con la que el *error cuadrático total*

$$E(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

sea mínimo. Determinar los valores de a y b para que eso ocurra.

13. Determinar los valores extremos de las funciones dadas, sujetas a las restricciones que se indican en cada caso.

a) $f(x,y) = xy$ sujeto a $x + y = 10$.

b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeto a $2x - 4y + 5 = 0$.

c) $f(x,y) = 2x + 2xy + y$ sujeto a $2x + y = 100$.

d) $f(x,y) = e^{-xy}$ sujeto a $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

e) $g(x,y,z) = x + y + z$ sujeto a $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

f) $h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $x + y + z = 25$.

g) $f(x,y) = x + 2y - 3z$ sujeto a $z = 4x^2 + y^2$.

14. Determinar el volumen máximo del paralelepípedo rectangular (con caras paralelas a los planos coordenados) que se puede inscribir en el elipsoide $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

15. Sea C la parte (en el primer octante) del arco de curva que resulta de la intersección del paraboloide $2z = 16 - x^2 - y^2$ con el plano $x + y = 4$. Encontrar los puntos de C más cercanos y más lejanos del origen. Calcular las distancias mínimas y máximas de C al origen.

16. Hallar los extremos relativos de la función $f(x, y, z) = xz + yz$, donde el punto (x, y, z) se encuentra en la intersección de las superficies $yz = 2$ y $x^2 + z^2 = 2$.

17. Usar el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener un valor máximo relativo de $f(x, y, z) = xyz$, con las restricciones $x + y + z = 4$ y $x - y - z = 3$.

18. Hallar tres números positivos cuya suma es 300 y tal que la suma de sus cuadrados sea mínima.

19. Hallar tres números positivos cuya suma es 240 y tal que la suma de sus productos tomados de a dos sea máximo.

20. Determinar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + xy$ en la región definida por

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 2 \, , |y| \leq 1\}.$$

21. Hallar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = -x^2 - 3y^2 + 4y + 1$ en el cuadrado cerrado que tiene por vértices $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ y $(0, -1)$.

22. Encontrar los extremos absolutos de la función $f(x, y) = (x + 1)^2 + y^2$ en el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon (x + 3)^2 + y^2 \leq 16 \, , y^2 \leq 2x + 14\}.$$