Análisis Matemático II – Práctico 7

1. Dibujar la región de integración R y calcular $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA$.

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_0^1 (1+2x+2y)\,dydx$

   b) $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^2 x\cos^2 y)\,dydx$

2. Dibujar la región de integración R y calcular $\displaystyle\iint_R f(x,y)dA$.

   a) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{\sqrt{y}} x^2y^2\,dxdy$

   b) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} (1+2x+2y)\,dydx$

   c) $\displaystyle\int_0^1\int_{y-1}^{0} e^{(x+y)}\,dxdy+\int_0^1\int_0^{1-y} e^{(x+y)}\,dxdy$

   d) $\displaystyle\int_0^6\int_{\frac{y}{2}}^{3} (x+y)\,dxdy$

3. Plantear la integral para ambos órdenes de integración y usar el más conveniente para calcular la integral sobre la región R.

   a) $\displaystyle\iint_R xy\,dA$, donde R: rectángulo con vértices $(0,0)$; $(0,5)$; $(3,5)$; $(3,0)$.

   b) $\displaystyle\iint_R \frac{y}{x^2+y^2}\,dA$, donde R limitada por $y=x$; $y=2x$; $x=2$.

   c) $\displaystyle\iint_R \frac{y}{1+x^2}\,dA$, donde R limitada por $y=0$; $y=\sqrt{x}$; $x=4$.

   d) $\displaystyle\iint_R x^2+y^2\,dA$, donde R limitada por $y=\sqrt{4-x^2}$; $y=0$.

e) $\displaystyle\int\int_R x\ dA$, donde R está situada en el primer cuadrante limitada por

$$y = \sqrt{25 - x^2}; 3x - 4y = 0; y = 0$$

4. Usar una integral iterada para hallar el área de la región limitada por las gráficas de las siguientes ecuaciones.

   a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$; $x = 0$; $y = 0$.
   b) $y = x^{\frac{3}{2}}$; $y = x$.
   c) $xy = 9$; $y = x$; $y = 0$; $x = 9$.

5. Usar una integral doble para obtener el volumen del sólido limitado por las gráficas de las siguientes ecuaciones.

   a) $z = xy$; $z = 0$; $y = x$; $x = 1$ (primer octante).
   b) $y = 0$; $z = 0$; $y = x$; $z = x$; $x = 0$; $x = 5$.
   c) $z = 0$; $z = x^2$; $x = 0$; $x = 2$; $y = 0$; $y = 4$.
   d) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

6. Usar el cambio de variables indicado para calcular las siguientes integrales dobles.

   a) $\displaystyle\int\int_R x\ dxdy$, donde

   $$x = \frac{1}{2}(u + v); y = \frac{1}{2}(u - v)$$

   y R el cuadrado de vértices $(0, 0); (1, 1); (2, 0); (1, -1)$.

   b) $\displaystyle\int\int_R 4(x + y)e^{x+y}\ dydx$, donde

   $$x = \frac{u + v}{2}; y = \frac{u - v}{2}$$

   y R el triángulo de vértices $(-1, 1); (1, 1); (0, 0)$.

7. Calcular las siguientes integrales utilizando el cambio a coordenadas polares.

   a) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} y\ dxdy$

   b) $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} x\ dydx$

c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx + \int_2^{2\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$

d) $\displaystyle\int\int_R (x^2+y^2)\,dA$, donde R limitada por $x^2+y^2 \leq 4; 0 \leq x; 0 \leq y$.

8. Resolver las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int_0^3\int_0^2\int_0^1 (x+y+z)\,dxdydz$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{-1}^1\int_{-1}^1 x^2y^2z^2\,dxdydz$

c) $\displaystyle\int_0^1\int_{1+x}^{2x}\int_z^{x+z} x\,dydzdx$

d) $\displaystyle\int_1^2\int_0^{x^2}\int_{x+z}^{x-z} z\,dydzdx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^2\int_1^{x^2}\int_1^{x+y} 2x^2y\,dzdydx$

f) $\displaystyle\int_2^3\int_0^{3y}\int_1^{yz} (2x+y+z)\,dxdzdy$

9. Representar la región limitada por las gráficas de las seguientes ecuaciones, expresar su volumen como una integral triple y calcular.

a) $x+2y+3z=6; x=0; y=0; z=0$.
b) $x^2+y^2=9; z=0; z=2$.
c) $z=9-4x^2-y^2; z=0$.
d) $36x^2+9y^2+4z^2=36$.

10. Calcular $\displaystyle\int\int\int_V e^{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dV$, donde V es la esfera unitaria en $\mathbb{R}^3$.

11. Calcular el volumen de la esfera centrada de radio r.

12. Calcular $\displaystyle\int\int\int_V z\,dV$, donde V es el sólido que se encuentra limitado por el cilindro $x^2+y^2=1$, el plano $z=0$ y el cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

13. Calcular $\displaystyle\iiint_W \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\, dW$, donde W es el sólido acotado por las esferas $x^2+y^2+z^2=a^2$ y $x^2+y^2+z^2=b^2$, con $0<b<a$.