Análisis Matemático II – Práctico 8

1. Calcular $\mathrm{div}\mathbf{F}$ y $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ de los siguientes campos vectoriales.

    a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ en $\mathbb{R}^3$.

    b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (y,z,x)$ en $\mathbb{R}^3$.

    c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy,yz,xz)$ en $(0,0,0)$ y en $(1,1,1)$.

2. Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial con derivadas segundas continuas en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^3$, y sea $\phi\colon U \to \mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en U. Probar los siguientes items.

    a) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{F}) = 0$.

    b) $\mathrm{rot}(\nabla\phi) = \vec{0}$.

3. Verificar los siguientes items.

    a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz,xz,xy)$ es irrotacional.

    b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2yz,xz,-xyz^2)$ es incompresible.

4. Sea $\mathbf{r}\colon [0,3] \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{r}(t) = (t,\cosh t)$. Se trata de un camino regular que recorre la catenaria $y = \cosh x$ desde el punto $(0,1)$ al punto $(3,\cosh 3)$. Obtener su parametrización por longitud de arco. Nota: recordar que $\operatorname{arc\,senh} u = \ln\left(u + \sqrt{u^2+1}\right)$.

5. Sea $\mathbf{r}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{r}(t) = (a\cos t, a\,\mathrm{sen}\,t, bt)$, donde a y b son constantes. Describir la curva dada por $\mathbf{r}$ y efectuar su parametrización por longitud de arco.

6. Calcular la integral $\displaystyle\int_C \left(x^2+y^2\right) ds$ sobre los siguientes caminos:

    a) C: eje x desde $x=0$ a $x=3$.

    b) C: contorno del triángulo de vértices $(0,0);(1,0);(0,1)$ recorrido en sentido antihorario.

7. Calcular la integral $\displaystyle\int_C (2x-y)\,dx + (x+3y)\,dy$ sobre los siguientes caminos:

    a) C: eje x desde $x=0$ a $x=5$.

    b) C: poligonal que une los puntos $(0,0)$ con $(3,0)$ y $(3,0)$ con $(3,3)$.

    c) C: poligonal elíptico $x = 4\cos t$; $y = 3\,\mathrm{sen}\,t$ desde $(0,3)$ a $(4,0)$ en sentido antihorario.

8. Evaluar la integral $\int_C \mathbf{F}\, d\mathbf{r}$, donde C está representada por $\mathbf{r}(t)$.

   a) $\mathbf{F}(x,y) = xy\vec{i} + y\vec{j}$ donde $C\colon \mathbf{r}(t) = 4t\vec{i} + t\vec{j}$, con $0 \leq t \leq 1$.
   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2y, x-z, xyz)$ donde $C\colon \mathbf{r}(t) = (t, t^2, 2)$, con $0 \leq t \leq 1$.
   c) $\mathbf{F}(x,y) = (-x, -2y)$ donde $C\colon y = x^3$, desde $(0,0)$ hasta $(2,8)$.
   d) $\mathbf{F}(x,y) = (2xy, x^2)$ donde
      1) $C\colon \mathbf{r}_1(t) = (t, t^2)$, con $0 \leq t \leq 1$.
      2) $C\colon \mathbf{r}_2(t) = (t, t^3)$, con $0 \leq t \leq 1$.
   e) $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ donde
      1) $C\colon \mathbf{r}_1(t) = \left(t, \dfrac{t}{2}, t\right)$, con $0 \leq t \leq 4$.
      2) $C\colon \mathbf{r}_2(t) = \left(t^2, t, t^2\right)$, con $0 \leq t \leq 2$.

9. Dados los campos vectoriales d y e del ejercicio 8:

   a) Calcular el rotor.
   b) Determinar la función potencial f, es decir, $\nabla f = \mathbf{F}$.
   c) Evaluar $f(p_2) - f(p_1)$, donde p_1 y p_2 son los extremos de C.
   d) Enunciar la propiedad que se verifica.

10. Dado el campo vectorial

    $$\mathbf{F}(x,y,z) = \left(3ay\frac{1}{x} - 2xe^{3z}, 3\ln x + cz\,\mathrm{sen}(2yz), 2y\,\mathrm{sen}(2yz) - bx^2e^{3z}\right)$$

    a) Hallar las constantes a, b y c para que $\mathbf{F}$ sea conservativo.
    b) Hallar la función potencial.
    c) Calcular el trabajo realizado por una particula al desplazarse de $(1,0,1)$ a $(e,2,1)$.

11. Calcular $\int_C (z+2y)dx + (2x-z)dy + (x-y)dz$, donde C es el arco de la espiral de Arquímedes que une los punto $(0,0,0)$ y $(1,1,1)$.

12. Determinar el trabajo que hay que realizar para mover una particula desde el punto $P = (0,,0)$ al punto $Q = (5,9)$ en el campo de fuerzas

    $$\mathbf{F}(x,y) = \left(9x^2y^2, 6x^3y - 1\right).$$

13. Usar el Teorema de Green para calcular

    $$\oint_C y^3dx + \left(x^3 + 3xy^2\right)dy,$$

    siendo C el camino desde $(0,0)$ a $(1,1)$ sobre la gráfica de $y = x^3$, y desde $(1,1)$ a $(0,0)$ sobre la gráfica de $y = x$.

14. Mientras está bajo la acción de una fuerza $\mathbf{F}(x,y) = \left(y^3, x^3 + 3xy^2\right)$, una particula da una vuelta sobre la circunferencia centrada de radio 3. Utilizar el Teorema de Green para hallar el trabajo realizado por $\mathbf{F}$.

15. Demostrar que si R es la región plana limitada por una curva cerrada simple regular a trozos C, entonces el área de R viene dada por

$$A = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

Luego, calcular el área de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

16. Verificar el Teorema de Green si $\mathbf{F}(x,y) = \left(y^2, x^2\right)$, donde C es la frontera de la región situada entre las gráficas de $y = x$ e $y = \dfrac{x^2}{4}$.

17. Comprobar el Teorema de Green en el plano para los campos escalares $P(x,y) = 2xy - x^2$ y $Q(x,y) = x + y^2$, donde C es la curva cerrada que limita la región entre $y = x^2$ e $y^2 = x$.

18. Verificar el Teorema de Green para el campo $\mathbf{F}(x,y) = \left(3x^2 + y, 4xy^2\right)$ siendo C la frontera de la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 4$.

19. Usando el Teorema de Green en el plano, evaluar la integral curvilínea cerrada

$$\oint_C \left(\operatorname{arc\,tg} x + y^2\right) dx + \left(\ln y - x^2\right) dy,$$

donde C es la frontera de la región limitada por las gráficas de $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 0$ e $y = \sqrt{1 - x^2}$.