Análisis Matemático II – Práctico 9

1. Describir paramétricamente las siguientes superficies.

   a) $x^2 + y^2 = 4z$, con $0 \leq z \leq 9$.
   b) $x^2 + z^2 = 16$, con $3 \leq y \leq 5$.
   c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, con $x \geq 0$.
   d) $x^2 + y^2 = 4$, con $0 \leq z \leq 2x + 3$.
   e) $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 0$ y $z = 6$.
   f) $x = 16 - y^2 - z^2$, con $x \geq 0$.

2. Hallar las ecuaciones cartesianas de las siguientes superficies dadas en forma vectorial.

   a) $\mathbf{r}(u, v) = \left(u, v, \dfrac{v + u}{2}\right)$.
   b) $\mathbf{r}(u, v) = (2 \cos u, v, 2 \operatorname{sen} u)$.
   c) $\mathbf{r}(u, v) = (5 \cos u \cos v, 5 \operatorname{sen} u \cos v, 5 \operatorname{sen} v)$.

3. Hallar la ecuación del plano tangente para cada una de las siguientes superficies paramétricas en el punto indicado.

   a) $x = u + v$, $y = 3u^2$, $z = u - v$ en el punto $(2, 3, 0)$.
   b) $\mathbf{r}(u, v) = (uv, ue^v, ve^u)$ en el punto $(0, 0, 0)$.

4. Calcular
   $$\int\!\!\int_S (x - 2y + z)\, dS$$
   donde la superficie S esta dada por $z = 4 - x$, $0 \leq x \leq 4$ y $0 \leq y \leq 4$.

5. Hallar
   $$\int\!\!\int_S xy\, dS$$
   donde la superficie S esta dada por $z = 6 - x - 2y$, en el primer octante.

6. Calcular
   $$\int\!\!\int_S z\, dS$$
   siendo S la superficie lateral del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z \leq 3$.

7. Determinar el flujo $\int\!\!\int_S \mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS$ de $\mathbf{F}$ a través de la superficie S.

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (3z, -4, y)$, donde $S: x + y + z = 1$ (primer octante).

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, z)$, donde $S: z = 9 - x^2 - y^2$ y $z \geq 0$.

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, z)$, donde $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y $z \geq 0$.

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(xz^2, x^2y - z^3, 2xy + y^2z\big)$, donde $S: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e $y \geq 0$.

8. Determinar el flujo de $\mathbf{F}(x,y,z) = (4xy, z^2, yz)$ a través de la superficie cerrada S : cubo unidad limitado por $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ y $z = 1$.

9. Comprobar el Teorema de Stokes en los siguientes casos.

   a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(y^2, xy, xz\big)$, donde $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $z \geq 0$.

   b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(y^2, 2xz, yz\big)$, donde $S: x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y $z \leq 2\sqrt{3}$.

   c) $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(3 - 2y, \dfrac{1}{3} - z, 6 - 4x\right)$, donde $S: z = 9 - x^2 - y^2$ y $z \geq 0$.

10. Aplicar el Teorema de Stokes para calcular la circulación del vector $(y, 2x, -1)$ a lo largo del círculo $x^2 + y^2 - 3 = 0$, con $z = 1$.

11. Probar que la circulación de $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, z)$ a lo largo de cualquier curva cerrada es nula.

12. Verificar que se cumple el Teorema de Stokes para $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2y, 3x, -z^2\big)$ siendo S la superficie del paraboloide dada por $x^2 + y^2 = 2z$ y C su contorno para $z = 2$.

13. Comprobar el Teorema de la divergencia en los siguientes casos.

    a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2x, -2, z^2\big)$ donde

    $$S: \text{cubo dado por } x = 0,\ x = a,\ y = 0,\ y = a,\ z = 0 \text{ y } z = a.$$

    b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(2x, 2y, z^2\big)$ donde

    $$S: \text{cilindro } x^2 + y^2 = 1, \text{ con } 0 \leq z \leq 5.$$

14. En los siguientes casos, utilizar el Teorema de la divergencia para evaluar $\displaystyle\int\!\!\int_S \mathbf{F}.\mathbf{N}\, dS$ y hallar el flujo de $\mathbf{F}$ al exterior a través del solido limitado por las gráficas de las ecuaciones.

    a) $\mathbf{F}(x,y,z) = \big(x^2, -2xy, xyz^2\big)$ donde

    $$S: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{y} \quad z = 0.$$

    b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x, y, z)$ donde

$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

c) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(x, y^2, -z\right)$ donde

$$S : x^2 + y^2 = 9, z = 0 \quad \text{y} \quad z = 4.$$

d) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(5x^3 + 1, \frac{3}{2}y^2, 5z^3 - 2x\right)$ donde

$$S : x^2 + z^2 + 2 = 4 \quad \text{y} \quad 4 - y = 0.$$

e) $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(3x^2, 2y^2, 2z^2\right)$ donde

$$S : x^2 + y^2 = z^2, z = 0 \quad \text{y} \quad z = 2.$$