Problemas propuestos – Prácticos 2–4

1. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5xy^2}{9x^2+7y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

estudiar la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

2. Demostrar, usando la definición, que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x+3y}{2y+1} = \frac{8}{5}$

3. Probar, usando la definición, que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,4)} \frac{x-y}{x+y} = -\frac{1}{3}$

4. Demostrar, usando la definición, que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\left(\frac{1}{2},3\right)} \frac{2x+y}{4x+y} = \frac{4}{5}$

5. Sea la función diferenciable $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = \big(\operatorname{sen}(xy+z), \big(1+x^2\big)^{yz}\big)$. Calcular la diferencial de f en el punto $(1,-1,1)$.

6. Sea la función diferenciable $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $g(u,v) = (u+e^v, v-e^u)$. Calcular la diferencial de f en el punto $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

7. Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{5xy^2}{9x^2+7y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

estudiar la continuidad de f en el punto $(0,0)$.

8. Dada la siguiente función, continua en el origen, probar que no es diferenciable en dicho punto:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

9. Analizar la continuidad y diferenciabilidad de la siguiente función en el punto $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y-2x^3}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

10. Estudiar la diferenciabilidad de la siguiente función en el $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

11. Sea

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

12. Dada

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Analizar los siguientes puntos:

a) Continuidad de f en el $(0,0)$.

b) Existencia y continuidad de las derivadas parciales de f en el $(0,0)$.

c) Diferenciabilidad de f en el $(0,0)$.

13. Sea $g\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $g(x,y)=\tan\left(x^3+y^2\right)$ y sea $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(t)=6^{\operatorname{sen}2t}$.

a) Hallar $\dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial(f\circ g)}{\partial y}(x,y)$ usando la regla de la cadena.

b) Verificar el resultado por composición y derivación.

14. Sean $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z)=\left(x^2+2,x+y^2+z^3\right)$ y $g\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ definida por $g(x,y,z)=\left(x+y+z,xyz,x^2+y^3\right)$. Calcular:

a) $J(f\circ g)(1,1,1)$ usando la regla de la cadena.

b) Verificar el resultado por composición y derivación.

15. Sean f y g funciones diferenciables definidas de la siguiente manera:

$$f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2 \text{ dada por } f(x,y,z)=\left(3x^2+y^2+z^2,5xyz\right)$$

y

$$g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3 \text{ dada por } g(x,y)=\left(xy,5x,y^3\right).$$

Calcular $J(f\circ g)(x,y)$ utilizando la regla de la cadena. Verificar por composición y derivación.

16. Hallar la derivada direccional de la función $f(x,y)=4x^3y^5$ en el punto $(1,1)$ y en la dirección del vector tangente a la circunferencia $x^2+y^2=2$ en $(1,1)$.