Problemas propuestos – Prácticos 5–7

1. Sea $z = f(x, y)$ dada implícitamente por $F(x, y, z) = xyz - e^z = 0$. Demostrar que

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\left(e^2, \frac{1}{2}, 2\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\left(e^2, \frac{1}{2}, 2\right)$$

2. Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(u, v) = (e^{u+v}, e^{u-v})$.

   a) Probar que f es localmente inversible en un entorno de cada punto $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

   b) Obtener f^{-1} para los puntos (u, v) de tales entornos.

   c) Comprobar que la matriz Jf^{-1} es inversa a la martiz Jf (en puntos correspondientes).

3. Sea la función $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \left(3e^{2x} + e^{3y}, 2e^{3y}\right)$.

   a) Probar que f es localmente inversible en un entorno de cada punto de $\mathbb{R}^2$.

   b) Obtener f^{-1}.

   c) Comprobar que Jf y Jf^{-1} son matrices inversas en puntos correspondientes.

4. Dada la función $F(x, y, z) = 3xy + xz + yz - 3e^z$.

   a) Probar que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a z como función de (x, y) (es decir, $z = f(x, y)$) en un entorno del punto $(1, 1)$.

   b) Calcular la derivada direccional de f en el punto $(1, 1)$ en la dirección que va hacia el punto $(0, 0)$.

5. Hallar y clasificar los extremos relativos (si existen) de la función

$$f(x, y) = \frac{3}{x^2 y^2} + 3x^2 + 3y^2$$

6. Hallar el valor máximo y mínimo del producto de tres números reales, si la suma de éstos debe ser cero y la suma de sus cuadrados debe ser 6.

7. Hallar los máximos y mínimos absolutos de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - x - y$$

   en la región limitada por $0 \leq x$, $0 \leq y$ y $x + y \leq 3$.

8. Si $f(x,y,z) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}y^2 - 3xy + 2x + z^3 - 3z + 5$, hallar (si existen) todos sus puntos críticos y clasificarlos.

9. Determinar y clasificar los extremos de la función $f(x,y) = x^3y^2(6-x-y)$ definida para puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que $0 < x$ y $0 < y$.

10. Hallar los extremos aboslutos de $f(x,y) = xy$ en la región

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 4,\ y \leq \frac{5}{3} \right\}.$$

11. Calcular el valor de la siguiente integral doble:

$$\int_0^2 \int_{\sqrt{2x}}^2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}y^3\right)\, dydx$$

12. Hallar el área de la región comprendida entre las curvas $y = \sqrt{4-x^2}$, $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$.

13. Calcular $\int\int_R xydA$, donde R es la región acotada por la recta $y = x - 1$ y la parábola $y^2 = 2x + 6$.

14. Calcular el área de la región comprendida entre $y \leq x$ y $x^2 - 4x \leq y$.